平面上に平行四辺形 OACB があり，この平面上の点 P に対し $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の形に表す．

(1) s, t が関係 $5s + 2t = 3$ を満たしながら変わるとき，P はある定直線上を動く．その直線と 2 辺 OA，BC との交点をそれぞれ A′，B′ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である．

(2) P が平行四辺形 OACB の周上または内部にあって，$5s + 2t \leqq 3$ を満たして動くとき，P が動く領域の面積は，平行四辺形の面積の $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ 倍である．

(3) 線分 A′B′ 上の点 P を通り 2 辺 OA，OB のそれぞれに平行な 2 直線を l, m とする．l, m, OA, OB で定まる平行四辺形の面積を S とする．点 P が線分 A′B′ 上を動くとき，S が最大になるのは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるときである．

(86 共通 1 次 数 II 4)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コ	サ
3	5	1	5	2	5	3	10	3	4

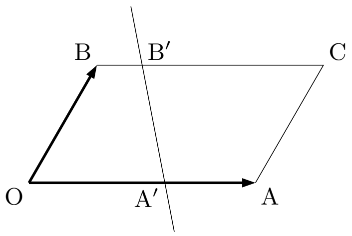
【解答】

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad 5s + 2t = 3$$

A′ は直線 OA 上の点であるから，$t = 0$ である．

$$5s + 2 \times 0 = 3 \qquad \therefore \quad s = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \frac{\boxed{\mathbf{3}}}{\boxed{\mathbf{5}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \qquad \cdots\cdots (\text{ア，イの答})$$



B′ は直線 BC 上の点であるから，$t = 1$ である．

$$5s + 2 \times 1 = 3 \qquad \therefore \quad s = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \frac{\boxed{\mathbf{1}}}{\boxed{\mathbf{5}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots (\text{ウ，エの答})$$

である．

(2) P が平行四辺形 OACB の周上または内部にあって，$5s+2t \leqq 3$ を満たして動くとき，P が動く領域は,「平行四辺形 OACB の周上または内部」と「直線 $\mathrm{A'B'}$ 上または直線 $\mathrm{A'B'}$ に関して O と同じ側」の共通部分，すなわち，台形 $\mathrm{BOA'B'}$ の周上および内部である．

B から直線 OA に下した垂線の長さを h とおくと

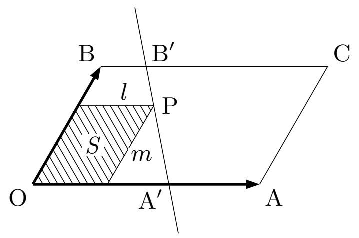
$$\begin{aligned}(\text{台形 }\mathrm{BOA'B'}\text{の面積}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{BB'}+\mathrm{OA'})h = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\mathrm{OA}+\frac{1}{5}\mathrm{OA}\right)h \\ &= \frac{2}{5}\mathrm{OA}\times h \\ &= \frac{2}{5}(\text{平行四辺形 OACB の面積})\end{aligned}$$

よって，P が動く領域の面積は，平行四辺形の面積の

$$\frac{\boxed{\mathbf{2}}}{\boxed{\mathbf{5}}}\text{ 倍} \qquad \cdots\cdots(\text{オ，カの答})$$

である．

(3) S は右図の斜線部分の面積である．



$$S = |s\overrightarrow{\mathrm{OA}}||t\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\angle\mathrm{AOB}$$

P は線分 $\mathrm{A'B'}$ 上を動くから

$$\begin{cases}5s+2t=3\\ 0<t<1\\ \dfrac{1}{5}<s<\dfrac{3}{5}\end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．

$$\begin{aligned}S &= st|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\angle\mathrm{AOB}\\ &= st\times(\text{四面体 OACB の面積})\end{aligned}$$

四面体 OACB の面積は一定であるから，条件 ① のもとで積 st が最大となる s, t を求める．s, t は正の数であるから，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\frac{5s+2t}{2} \geqq \sqrt{5s\cdot 2t}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 \geqq 10st$$

$$\therefore\quad st \leqq \frac{9}{40}$$

等号が成り立つのは，$5s=2t$ のときであり，$5s+2t=3$ とあわせると

$$5s=2t=\frac{3}{2} \qquad \therefore\quad s=\frac{3}{10},\quad t=\frac{3}{4}$$

これは①を満たす．したがって，st の最大値は $\dfrac{9}{40}$ である．

以上より，S が最大となるのは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\mathbf{3}}}{\boxed{\mathbf{10}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\mathbf{3}}}{\boxed{\mathbf{4}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(\text{キ〜サの答})$$

のときである．

- 1 文字消去の解法もある．

$$st = s \cdot \frac{3-5s}{2} = -\frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s = -\frac{5}{2}\left(s - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{9}{40}$$

st は $s = \dfrac{3}{10}$ のとき，最大値 $\dfrac{9}{40}$ をとる．このとき $t = \dfrac{3 - 5 \cdot \frac{3}{10}}{2} = \dfrac{3}{4}$ であり，s，t は条件 ① を満たす．