

n を 2 以上の自然数とする. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ および $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ を満足する数列 x_1, x_2, \dots, x_n および y_1, y_2, \dots, y_n が与えられている. y_1, y_2, \dots, y_n を並べかえて得られるどのような数列 z_1, z_2, \dots, z_n に対しても

$$\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ.

(87 東京大理 5)

【答】 略

【解答】

与式を変形すると

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{j=1}^n y_j^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n x_j z_j + \sum_{j=1}^n z_j^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^n x_j y_j \geq \sum_{j=1}^n x_j z_j \quad \left(\because \sum_{j=1}^n y_j^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2 \right) \end{aligned}$$

であるから, $M_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $P_n\{z_j\} = \sum_{j=1}^n x_j z_j$ とおき, 任意の数列 $\{z_j\}$ に対して

$$M_n \geq P_n\{z_j\} \quad \cdots \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 2$ のとき

$P_2\{z_j\} = x_1 z_1 + x_2 z_2$, $M_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2$ である.

$z_1 = y_1$ のとき, $z_2 = y_2$ より

$$P_2\{z_j\} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = M_2$$

$z_1 = y_2$ のとき, $z_2 = y_1$ より

$$\begin{aligned} M_2 - P_2\{z_j\} &= (x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1) \\ &= (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0 \quad (\because x_1 \geq x_2, y_1 \geq y_2) \end{aligned}$$

いずれにせよ, (*) が成立する. $\cdots \cdots$ ①

(ii) n での成立を仮定する.

$z_{n+1} = y_{n+1}$ のとき

$$P_{n+1}\{z_j\} = P_n\{z_j\} + x_{n+1} y_{n+1} \leq M_n + x_{n+1} y_{n+1} = M_{n+1}$$

$z_{n+1} \neq y_{n+1}$ のとき, $z_i = y_{n+1}$ をみたます i ($i \neq n+1$) が存在する.

$$\begin{aligned} P_{n+1}\{z_j\} &= x_1 z_1 + \cdots + x_i z_i + \cdots + x_{n+1} z_{n+1} \\ &= x_1 z_1 + \cdots + x_i y_{n+1} + \cdots + x_{n+1} z_{n+1} \end{aligned}$$

数列 $\{z_j\}$ の z_i と z_{n+1} のみを入れ替えた数列を $\{z_j'\}$ とする. ①より

$$x_i y_{n+1} + x_{n+1} z_{n+1} \leq x_i z_{n+1} + x_{n+1} y_{n+1}$$

であるから

$$\begin{aligned} P_{n+1}\{z_j\} &\leq P_{n+1}\{z_j'\} \\ &= P_n\{z_j'\} + x_{n+1} y_{n+1} \\ &\leq M_n + x_{n+1} y_{n+1} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= M_{n+1} \end{aligned}$$

$n+1$ のときも (*) は成立する.

(i), (ii) より, 2 以上の自然数 n に対して, (*) が示された.