数列 $\{a_n\}$ は次の関係式 (i), (ii) を満たしている．

(i) $a_1=1$

(ii) $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$

この数列の第 n 項 a_n が n であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(88 大阪市大 理・工・医 2)

【答】 略

【解答】

すべての自然数 n について

「$a_n=n$」…… $(*)$

であることを数学的帰納法で示す．

(I) $n=1$ のとき

(i) より $a_1=1$ であり，$(*)$ は成り立つ．

(II) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ に対して $(*)$ が成り立つと仮定すると，(ii) より

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(k-1)\cdot k+ka_{k+1}=2\{1\cdot k+2\cdot(k-1)+\cdots+(k-1)\cdot2+k\cdot1\}\quad\cdots\cdots ①$$

また，(ii) で n を $k-1$ にとれば

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(k-1)\cdot k=2\{1\cdot(k-1)+2\cdot(k-2)+\cdots\cdots+(k-1)\cdot1\}\quad\cdots\cdots ②$$

①，② の辺々を引いて

$$\begin{aligned}ka_{k+1}&=2\{1\cdot1+2\cdot1+\cdots+(k-1)\cdot1+k\cdot1\}\\&=2\cdot\{1+2+\cdots+(k-1)+k\}\\&=2\cdot\frac{k(k+1)}{2}\\&=k(k+1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{k+1}=k+1$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(I)，(II) から，すべての自然数 n について $a_n=n$ が成り立つ．　……(証明終わり)

- ① について，次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k-1}j(j+1)&=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}\\&=\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)\quad(\text{ただし } k\geqq2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}j(k-j+1)&=k\sum_{j=1}^{k}j-\sum_{j=1}^{k}(j-1)j\\&=k\sum_{j=1}^{k}j-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{3}\{(j-1)j(j+1)-(j-2)(j-1)j\}\\&=k\cdot\frac{k(k+1)}{2}-\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{6}\{3k-2(k-1)\}\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$①\iff \frac{1}{3}(k-1)k(k+1)+ka_{k+1}=2\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$$

これは $k=1$ のときも成り立つ．

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_{k+1}&=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)-\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)\right\}\\&=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{3}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}\\&=k+1\end{aligned}$$

である．