(1) 2 組の実数 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ と $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots b_n$ が与えられたとき

$$c_k=\left(\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} {b_i}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

とおく．$c_{k+1}-c_k$ の符号を調べ，不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

を証明せよ．また，等号の成立する条件を述べよ．

(2) 与えられた 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ に対して

$$h(x)=\left(\int_a^x (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_a^x (g(t))^2\,dt\right)-\left(\int_a^x f(t)g(t)\,dt\right)^2$$

とおく．導関数 $h'(x)$ $(a<x<b)$ の符号を調べ，不等式

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqq \left(\int_a^b (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,dt\right)$$

を証明せよ．また，等号の成立する条件を述べよ．

(88 名古屋市大 医 2)

【答】

(1) 証明は略．等号が成立する条件は $a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$

(2) 証明は略．等号が成立する条件は「つねに $f(x)=0$」または「つねに $g(x)=kf(x)$ (k は定数)」

【解答】

(1) $c_k=\left(\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} {b_i}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2$ より

$$\begin{aligned}
c_{k+1}&=\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2\right)+{a_{k+1}}^2\right\}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} {b_i}^2\right)+{b_{k+1}}^2\right\}-\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)+a_{k+1}b_{k+1}\right\}^2\\
&=\left(\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)+{a_{k+1}}^2\sum_{i=1}^{k} {b_i}^2+{b_{k+1}}^2\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2+{a_{k+1}}^2{b_{k+1}}^2\\
&\qquad-\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2+2a_{k+1}b_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)+{a_{k+1}}^2{b_{k+1}}^2\right\}\\
&=\left(\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} {b_i}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2+\sum_{i=1}^{k}({a_{k+1}}^2{b_i}^2-2a_{k+1}b_{k+1}a_ib_i+{b_{k+1}}^2{a_i}^2)\\
&=c_k+\sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}b_i-b_{k+1}a_i)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad c_{k+1}-c_k=\sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}b_i-b_{k+1}a_i)^2 \geqq 0$$

$$\therefore\quad c_{k+1}-c_k \geqq 0$$

である．

$c_1=(a_1)^2(b_1)^2-(a_1b_1)^2=0$ であり

$$c_n \geqq c_{n-1} \geqq \cdots \geqq c_1=0 \qquad \therefore\quad c_n \geqq 0$$

が成り立つ．よって，不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \quad (n \geqq 1)$$

は成り立つ． …… (証明終わり)

また

$$a_{k+1}b_i = b_{k+1}a_i \iff a_i : b_i = a_{k+1} : b_{k+1}$$

であるから，等号の成立する条件は

$$\boldsymbol{a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $h(x) = \left(\int_a^x (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_a^x (g(t))^2\,dt\right) - \left(\int_a^x f(t)g(t)\,dt\right)^2$ $(a \leqq x \leqq b)$ を，$a < x < b$ の範囲で微分する．

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (f(x))^2 \cdot \int_a^x (g(t))^2\,dt + \int_a^x (f(t))^2\,dt \cdot (g(x))^2 - 2\int_a^x f(t)g(t)\,dt \cdot (f(x)g(x)) \\
&= \int_a^x (f(x)g(t))^2\,dt + \int_a^x (g(x)f(t))^2\,dt - 2\int_a^x f(x)g(x)f(t)g(t)\,dt \\
&= \int_a^x (f(x)g(t) - g(x)f(t))^2\,dt \\
&\geqq 0 \quad (\because\ (\quad)^2 \geqq 0,\ x \geqq a)
\end{aligned}$$

したがって，$a \leqq x \leqq b$ において $h(x)$ は非減少であり

$$h(b) \geqq h(x) \geqq h(a) = 0 \qquad \therefore \quad h(b) \geqq 0$$

が成り立つ．よって，不等式

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqq \left(\int_a^b (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,dt\right)$$

は成り立つ． …… (証明終わり)

等号が成立する条件を求める．

(i) $a \leqq x \leqq b$ において,「つねに $f(x) = 0$」または「つねに $g(x) = 0$」であるとき，$a \leqq x \leqq b$ を満たすすべての x に対し $h(x) = 0$ であり，$h(b) = 0$ である．

よって，与えられた不等式は等式として成り立つ．

(ii) $a \leqq x \leqq b$ において,「$f(x_1) \fallingdotseq 0$ となる x_1 が存在し」かつ「$g(x_2) \fallingdotseq 0$ となる x_2 が存在する」ときを考える．

このとき，等号 $h(x) = 0$ が成立する条件は，$a < x < b$ を満たす x に対し $h'(x) = 0$，すなわち

$$f(x)g(t) - g(x)f(t) = 0 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つことが必要である．

(ア) $f(x_1) \fallingdotseq 0$ かつ $g(x_2) \fallingdotseq 0$ となる x_1，x_2 が a のみのとき

$a < x \leqq b$ ではつねに $f(x) = 0$ かつ $g(x) = 0$ であり，$h(x) = 0$ となる．

与えられた不等式は等式として成り立つ．

(イ) $f(x_1) \fallingdotseq 0$ または $g(x_2) \fallingdotseq 0$ を満たす x_1，x_2 のうちの少なくとも一方は a より大きいとき

$$(*) \iff \begin{cases} x_1 > a \text{ のとき} \quad g(t) = \dfrac{g(x_1)}{f(x_1)}f(t) \\ x_2 > a \text{ のとき} \quad f(t) = \dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}g(t) \end{cases}$$

となる．$x_1 > a$ のときも同じく論証されるので，$x_2 > a$ のときを考えることにする．定数 k を用いて $a < t \leqq x_2$ を満たすすべての t について $f(t) = kg(t)$ となることが必要である．

$a \leqq x \leqq b$ を満たすすべての x について

$$f(x) = kg(x)\ (k \text{ は定数})$$

とおくと，$(*)$ は

$$f(x) \cdot g(t) - g(x)f(t) = kg(x) \cdot g(t) - g(x) \cdot kg(t) = 0$$

が成り立つから，$f(x) = kg(x)$ であることが必要十分である．

(ア) のときは，$f(a) = kg(a)\ (\fallingdotseq 0)$ となる k が存在し，$a < x \leqq b$ のとき $f(x) = g(x) = 0$ であるから，$a \leqq x \leqq b$ のとき $f(a) = kg(a)$ が成り立つ．したがって，(イ) は (ア) を含む．

以上 (i)，(ii) より，等号が成立する条件は

$a \leqq x \leqq b$ において

「つねに $f(x) = 0$」または「つねに $g(x) = 0$」

または「つねに $f(x) = kg(x)$ (k は定数)」

が成り立つことである．これは $k = 0$ のとき $f(x) = kg(x)$ は「つねに $f(x) = 0$」となるから，等号の成立条件は

$\boldsymbol{a \leqq x \leqq b}$ において

「つねに $\boldsymbol{g(x) = 0}$」または「つねに $\boldsymbol{f(x) = kg(x)}$ ($\boldsymbol{k}$ は定数)」 ……(答)

としてまとめることができる．

- 等号の成立条件を

  $a \leqq x \leqq b$ において

  「つねに $f(x) = 0$」または「つねに $g(x) = kf(x)$ (k は定数)」

  としてもよい．

- この不等式は積分型のコーシー・シュワルツの不等式とよばれるものである．実数 a，b，c，x，y，z についてのコーシー・シュワルツの不等式

  $$(ax + by + cz)^2 \leqq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

  の証明のひとつとして，u についての不等式

  $$(au - x)^2 + (bu - y)^2 + (cu - z)^2 \geqq 0$$

  を利用するものがあった．積分型のコーシー・シュワルツの不等式でもこの解法を用いることができる．すなわち，u についての不等式

  $$(uf(t) + g(t))^2 \geqq 0$$

  を利用する．$a \leqq b$ のとき，a から b まで t で積分すると

  $$\int_a^b (uf(t) + g(t))^2\ dt \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  $$\therefore\quad u^2\int_a^b (f(t))^2\,dt + 2u\int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b (g(t))^2\,dt \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

  がつねに成り立つ．

  (i) $\displaystyle\int_a^b \{f(t)\}^2\,dx = 0$ すなわち $a \leqq x \leqq b$ において「つねに $f(t) = 0$」のとき，目標の不等式は等式として成り立つ．

(ii) $\displaystyle\int_a^b \{f(t)\}^2\,dt \fallingdotseq 0$ のとき，$\displaystyle\int_a^b \{f(t)\}^2\,dt > 0$ であり，u についての 2 次不等式 ㋑はつねに成り立つから，(判別式) $\leqq 0$ が成り立つ．すなわち

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 - \left(\int_a^b (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,dt\right) \leqq 0$$

$$\therefore \quad \left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqq \left(\int_a^b (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,dt\right)$$

が成り立つ．

等号が成立する条件は

(i) $\displaystyle\int_a^b \{f(t)\}^2\,dx = 0$ のとき

「つねに $f(t) = 0$」であり，目標の不等式は等号が成り立つ．

(ii) $\displaystyle\int_a^b \{f(t)\}^2\,dx \fallingdotseq 0$ のとき

不等式 ㋐ により等号が成り立つ条件は

$$uf(t) + g(t) = 0 \qquad \therefore \quad g(t) = -uf(t)$$

を満たす実数 u が存在することである．すなわち

$$g(t) = kf(t) \ (k(= -u) \text{ は定数})$$

と表されることである．

以上，(i)，(ii) より，等号が成立する条件は

$a \leqq x \leqq b$ において

「つねに $f(x) = 0$」または「つねに $g(x) = kf(x)$ (k は定数)」

が成り立つことである．