閉区間 $[0,\ a]$ $(a>0)$ のすべての値をとる確率変数 X の確率密度関数を $f(x)=b(4-x)x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) X の平均値が $\dfrac{a}{2}$ のとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

(2) t の方程式

$$4t^2-12t+9(X-1)=0$$

の 2 つの解がともに正となる X の確率を求めよ．

(89 東京都立大 理・工 5)

【答】

(1) $a=4,\ b=\dfrac{3}{32}$

(2) $\dfrac{11}{32}$

【解答】

(1) $f(x)=b(4-x)x$ $(0\leqq x\leqq a)$ は確率密度関数であるから

$$\int_0^a f(x)\,dx=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,dx&=\int_0^a b(4-x)x\,dx\\&=b\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=b\left(2a^2-\frac{a^3}{3}\right)\end{aligned}$$

① より

$$a^2b(6-a)=3 \qquad \cdots\cdots ①'$$

が成り立つ．また，X の平均値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^a xf(x)\,dx=\int_0^a b(4-x)x^2\,dx\\&=b\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^a=\frac{a^3b}{12}(16-3a)\end{aligned}$$

である．$E(X)=\dfrac{a}{2}$ より

$$\frac{a^3b}{12}(16-3a)=\frac{a}{2}$$

$a\neq 0$ より

$$a^2b(16-3a)=6 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．①′ かつ ② を解く．

$$「①'\text{ かつ }②」\iff \begin{cases} b=\dfrac{3}{a^2(6-a)}\\ \dfrac{3}{6-a}(16-3a)=6\end{cases}$$

第 2 式より

$$16-3a=2(6-a) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得ることができ，第 1 式に代入して

$$\boldsymbol{b=\frac{3}{32}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得る．

(2) 方程式 $4t^2-12t+9(X-1)=0$ の 2 解がともに正である条件は

$$\begin{cases} (\text{判別式}) \geqq 0 \\ (2\text{ 解の和}) > 0 \\ (2\text{ 解の積}) > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6^2-4\cdot 9(X-1) \geqq 0 \\ \dfrac{12}{4} > 0 \quad (\text{これはつねに成立する}) \\ \dfrac{9(X-1)}{4} > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X \leqq 2 \\ X > 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad 1 < X \leqq 2$$

(1) の結果より $f(x)=\dfrac{3}{32}(4-x)x$ であり，求める確率 $P(1<X\leqq 2)$ は

$$\begin{aligned} P(1<X\leqq 2) &= \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \frac{3}{32}\int_1^2 (4-x)x\,dx \\ &= \frac{3}{32}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{32}\cdot\left(\frac{16}{3}-\frac{5}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{11}{32}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．