双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の 1 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた 2 本の接線の両接点を通る直線を l とする．ただし，$y_0 \neq 0$ とする．

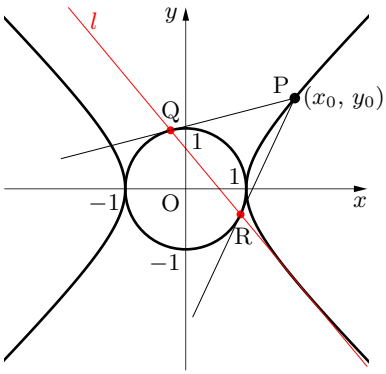
(1) 直線 l は，方程式 $x_0x+y_0y=1$ で与えられることを示せ．
(2) 直線 l は，双曲線に接することを証明せよ．

(89 名古屋市大 経済 A 3)

【答】

(1) 略
(2) 略

【解答】



(1) 両接点を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ とおくと，2 本の接線の方程式はそれぞれ

$$x_1x+y_1y=1 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x_2x+y_2y=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は ①，② 上にあるから

$$x_1x_0+y_1y_0=1 \qquad \cdots\cdots ①'$$
$$x_2x_0+y_2y_0=1 \qquad \cdots\cdots ②'$$

が成り立つ．①′，②′ は

$$x_0x_1+y_0y_1=1$$
$$x_0x_2+y_0y_2=1$$

でもある．これは Q，R が直線

$$l : x_0x+y_0y=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

上の点であることを示している．すなわち，両接点を通る直線は方程式 ③ で与えられる．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ が双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点であるとき，点 $(x_0,\ -y_0)$ も同じ双曲線上にある．点 $(x_0,\ -y_0)$ における双曲線の方程式は

$$x_0x-(-y_0)y=1 \qquad \therefore \quad x_0x+y_0y=1$$

であり，l と一致する．すなわち，直線 l は双曲線 $x^2-y^2=1$ に接する． $\cdots\cdots$ (証明終わり)