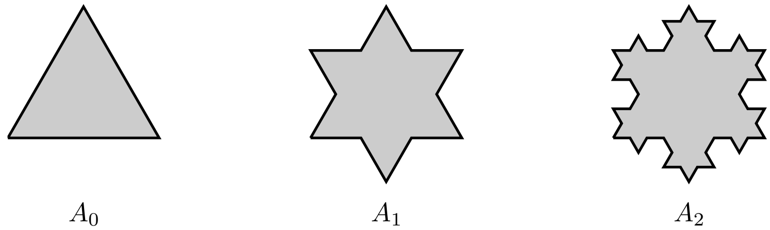
面積 1 の正三角形 A_0 からはじめて，図のように図形 A_1，A_2，$\cdots$ をつくる．ここで A_n は，A_{n-1} の各辺の三等分点を頂点にもつ正三角形を A_{n-1} の外側につけ加えてできる図形である．



このとき次の問いに答えよ．

(1) 図形 A_n の辺の数を求めよ．

(2) 図形 A_n の面積を S_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(90 香川大 教育 5)

【答】

(1) $3\cdot 4^n$

(2) $\dfrac{8}{5}$

【解答】

(1) 図形 A_n の辺の数を a_n とおく．

図形 A_{n-1} から A_n をつくるとき，A_{n-1} の各辺はどれも三等分され，両側の 2 つの線分はそのまま，中央の線分にはこれを一辺とする正三角形が A_{n-1} の外側につけ加えられるので辺の数は 2 となるから，4 倍となり

$$a_n = 4a_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

を満たす．$a_0 = 3$ だから

$$\boldsymbol{a_n = 3\cdot 4^n} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) A_{n-1} から A_n をつくるとき，つけ加えられる正三角形 1 つの面積は

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^n S_0 = \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

であるから，$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + a_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= S_{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= S_{n-1} + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

であり

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^k \quad (n \geqq 1)$$

である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = 1 + \frac{3}{5} = \boldsymbol{\frac{8}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．