自然数 n に対して n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 であるものの個数を $f(n)$ で表す．

(1) $f(12),\ f(13),\ f(16)$ を求めよ．

(2) m が n 未満の自然数で m と n との最大公約数が 1 であるとき，$n-m$ と n との最大公約数も 1 であることを示せ．

(3) $n \geqq 3$ のとき $f(n)$ は偶数であることを示せ．

(92 埼玉大 後 理・工 1)

【答】

(1) $f(12)=4,\ f(13)=12,\ f(14)=8$

(2) 略

(3) 略

【解答】

m を $1 \leqq m \leqq n$ を満たす自然数，整数 $m,\ n$ の最大公約数を $(m,\ n)$ とし

$$A_n = \{m \,|\, (m,\ n)=1\}$$

とする．また，集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表す．

(1) $n=12=2^2\cdot 3$ のとき，$\overline{A_{12}}$ は 2 または 3 の倍数の集合であり

$$\overline{A_{12}} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 3,\ 9\}$$

である．$n(\overline{A_{12}})=8$ であるから

$$f(12)=12-n(\overline{A_{12}})=12-8=\mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$n=13$ のとき，$\overline{A_{13}}=\{13\}$ であり

$$f(13)=13-n(\overline{A_{13}})=13-1=\mathbf{12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$n=16=2^4$ のとき，$\overline{A_{16}}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$ であり

$$f(16)=16-n(\overline{A_{16}})=16-8=\mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $n-m(>0)$ と n との公約数を g とすると

$$n-m=ag,\ n=bg$$

となる整数 $a,\ b$ が存在する．このとき

$$m=n-ag=(b-a)g$$

であり，g は $m,\ n$ の公約数でもある．$(m,\ n)=1$ より

$$g=1$$

であり，$n-m$ と n との最大公約数も 1 である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) $m \in A_n$ である m に対して

$m=n-m$ とすると，$n=2m$ であり

$$(m,\ n)=(m,\ 2m)=m \geqq 2 \quad (\because\ 2m=n \geqq 3 \text{ より } m \geqq 2)$$

であり，$(m,\ n)=1$ に反する．したがって，$m \neq n-m$ である．

$m \neq n-m$ のとき，(2) より $n-m \in A_n$ であるから $\{m,\ n-m \,|\, m \in A_n\}$ の要素の個数は偶数である．

以上より，$f(n)$ は偶数である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

- A_n は $1 \leqq m < \dfrac{n}{2}$ かつ $(m,\ n) = 1$ を満たす m と $n - m$ を対にしてつくられる集合

$$\left\{ m,\ n-m \,\middle|\, 1 \leqq m < \frac{n}{2} \text{ かつ } (m,\ \ n) = 1 \right\}$$

である．$n = 12,\ 13,\ 16$ のとき

$$A_{12} = \{1,\ 11,\ 5,\ 7\},$$
$$A_{13} = \{1,\ 12,\ 2,\ 11,\ 3,\ 10,\ 4,\ 9,\ 5,\ 8,\ 6,\ 7\},$$
$$A_{16} = \{1,\ 15,\ 3,\ 13,\ 5,\ 11,\ 7,\ 9\}$$

といった具合いである．