A，B の二人がじゃんけんをして，グーで勝てば 3 歩，チョキで勝てば 5 歩，パーで勝てば 6 歩進む遊びをしている．1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値を E とする．

(1) B がグー，チョキ，パーを出す確率がすべて等しいとする．A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すとき，E の値は最大となるか．

(2) B がグー，チョキ，パーを出す確率の比が $a:b:c$ であるとする．A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すならば，任意の $a,\ b,\ c$ に対し $E \geqq 0$ となるか．

(92 東京大 理 6)

【答】

(1) グー，チョキ，パーを確率 0, 1, 0 で出す

(2) グー，チョキ，パーの確率の比を 5 : 6 : 3 で出す

【解答】

A がグー，チョキ，パーを出す確率の比を $p:q:r$ とすると，それぞれの確率は

$$\frac{p}{p+q+r},\ \frac{q}{p+q+r},\ \frac{r}{p+q+r}$$

である．$p+q+r=1$ と仮定しても一般性は失なわれないから，A がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ

$$p,\ q,\ r \quad \text{ただし，} p+q+r=1$$

ととることができる．同じく，B がグー，チョキ，パーを出す確率の比を $a:b:c$ としたときは，B がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ

$$a,\ b,\ c \quad \text{ただし，} a+b+c=1$$

ととることができる．

1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値を X とおくと

A がグーで勝つとき，$X=3$ で確率は pb，B がグーで勝つとき，$X=-3$ で確率は qa，
A がチョキで勝つとき，$X=5$ で確率は qc，B がチョキで勝つとき，$X=-5$ で確率は rb
A がパーで勝つとき，$X=6$ で確率は ra，B がパーで勝つとき，$X=-6$ で確率は pc
(アイコのときは，$X=0$ で確率は $pa+qb+rc$)

である．このとき，X の期待値 E は

$$E=3(pb-qa)+5(qc-rb)+6(ra-pc) \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

(1) $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ であるから，① は

$$\begin{aligned} E &= 3\cdot\frac{1}{3}(p-q)+5\cdot\frac{1}{3}(q-r)+6\cdot\frac{1}{3}(r-a) \\ &= \frac{1}{3}(-3p+2q+r) \\ &= \frac{1}{3}(1-4p+q) \quad (\because\ p+q+r=1) \end{aligned}$$

これが最大となるのは

$$p=0 \text{ かつ } q=1 \text{ (このとき，} r=0)$$

のときであり，A が

グー，チョキ，パーを確率 0，1，0 で出す ……(答)

とき，E の値は最大となる．

(2) ① を a, b, c について整理すると

$$E=(6r-3q)a+(3p-5r)b+(5q-6p)c$$

0 以上の任意の数 a, b, c に対し $E \geqq 0$ となる条件は

$$\begin{cases} 6r-3q \geqq 0 \\ 3p-5r \geqq 0 \\ 5q-6p \geqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 6r \geqq 3q \\ 3p \geqq 5r \\ 5q \geqq 6p \end{cases}$$

である．第 1，2 の不等式より

$$3p \geqq 5r \geqq 5 \times \frac{3q}{6} \qquad \therefore \quad 6p \geqq 5q$$

であり，第 3 式とあわせると

$$6p=5q \qquad \therefore \quad p:q=5:6$$

が成り立つ．同じく

$$6r=3q \text{ かつ } 3p=5r$$
$$\therefore \quad q:r=6:3 \text{ かつ } p:r=5:3$$

が成り立つ．すなわち

$$p:q:r=5:6:3$$

である．よって，A が

グー，チョキ，パーの確率の比を 5 : 6 : 3 で出す ……(答)

ならば，0 以上の任意の a, b, c に対し $E \geqq 0$ となる．

- $E=Aa+Bb+Cc$ において

  0 以上の任意の a, b, c に対し $E \geqq 0$ が成り立つ
  $\Longleftrightarrow$「$A \geqq 0$ かつ $B \geqq 0$ かつ $C \geqq 0$」

  が成り立つ．
  $\Longrightarrow$ の証) $(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0)$ とすると，$A \geqq 0$ が得られ，$(a,\ b,\ c)=(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$ とすると，それぞれ $B \geqq 0$, $C \geqq 0$ が得られる．
  $\Longleftarrow$ の証) 0 以上の任意の a, b, c に対し，$Aa \geqq 0$, $Bb \geqq 0$, $Cc \geqq 0$ であるから，$E \geqq 0$ が成り立つ．