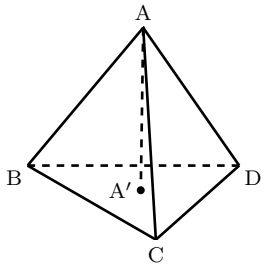
四面体 ABCD の頂点 A，B から対面へ引いた垂線の足をそれぞれ A′，B′ とする．このとき次の問いに答えよ．



(1) AA′ と BB′ が交われば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であることを示せ．

(2) 逆に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であれば，AA′ と BB′ は交わることを示せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$，かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ であれば，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であることを示せ．

(4) 四面体 ABCD の各頂点 A，B，C，D を通る球の中心を O とし，

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく．(3) の仮定のもとで，AA′ と BB′ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

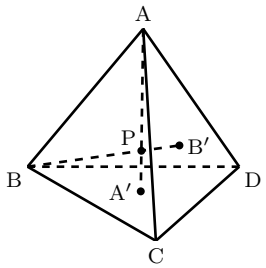
を満たす点 H で交わることを示せ．

(94 岡山大 理系 1)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】



(1) AA′ と BB′ の交点を P とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ はそれぞれ平面 BCD，ACD と垂直だから

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\end{cases}$$

が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=0 \qquad\cdots\cdots(\text{証明終わり})\end{aligned}$$

である．

(2) 与えられた条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0 \qquad\cdots\cdots ①$$

である．

AA′ は平面 BCD と垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0 \qquad\cdots\cdots ②$$

である．① かつ ②より，平面 ABA′ は CD と垂直である．

また，BB′ は平面 ACD と垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0 \qquad\cdots\cdots ③$$

である．① かつ ③より，平面 ABB′ は CD と垂直である，

AB を含み CD と垂直な平面は 1 つであるから, 2 平面 ABA′，ABB′ は一致し，4 点 A, B, A′, B′ は同一平面上にある．AA′，BB′ は平行でないから，AA′ と BB′ は交わる．

……(証明終わり)

(3) 与えられた条件より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{cases}$$

辺々の差をとると

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

…… (証明終わり)

が成り立つ．

(4) O は頂点 A，B，C，D を通る球の中心であるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$$

であり，(3) の仮定が成り立つから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

である．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{2}\{(\vec{c}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\}\\&=\frac{1}{2}\{|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}&=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{b})\\&=\frac{1}{2}\{(\vec{d}+\vec{b})\cdot(\vec{d}-\vec{b})+(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{b})\}\\&=\frac{1}{2}\{|\vec{d}|^2-|\vec{b}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}\}\\&=0\end{aligned}$$

であり，AH は平面 BCD に垂直である．

同様にして，BH は平面 ACD に垂直である．H は AA′ かつ BB′ 上の点である．すなわち，AA′ と BB′ は点 H で交わる．

…… (証明終わり)

- 向かい合う線分が垂直なとき，(4) は 2 本の垂線の交点を求めているが，これは 4 本の垂線でも成り立つ．H は四面体の垂心と呼ばれる．

  垂心が存在する四面体を**垂心四面体**という．本問により垂心が存在する条件は向かい合う線分が垂直なことであることが示された．この性質をもつ四面体を**直陵四面体 (直辺四面体)** ともいう．