次の問いに答えよ．

(1) $p>0,\ q>0,\ p+q=1$ のとき，関数 $f(x)=x^2$ について次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(px_1+qx_2) \leqq pf(x_1)+qf(x_2)$$

(2) $a>0,\ b>0,\ a+b=1$ のとき，(1) を用いて次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{25}{2}$$

(95 年　早稲田大　政経　3)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) $f(x)=x^2$ より

$$\begin{aligned}
&(\text{右辺})-(\text{左辺})\\
&=({px_1}^2+{qx_2}^2)-(px_1+qx_2)^2\\
&=p(1-p){x_1}^2+q(1-q){x_2}^2-2pqx_1x_2\\
&=pq{x_1}^2+pq{x_2}^2-2pqx_1x_2 \quad (\because\ p+q=1)\\
&=pq(x_1-x_2)^2\\
&\geqq 0 \quad (p>0,\ q>0)
\end{aligned}$$

が成り立つから，不等式

$$f(px_1+qx_2) \leqq pf(x_1)+qf(x_2) \qquad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$

は成り立つ．等号が成り立つのは $x_1=x_2$ のときである．

(2) (1) の不等式より

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=f\left(a+\frac{1}{a}\right)+f\left(b+\frac{1}{b}\right) \quad (\because\ f(x)=x^2)\\
&=2\left\{\frac{1}{2}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}f\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}\\
&\geqq 2f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right) \quad (\because\ (1)\text{ の不等式})\\
&\geqq 2\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \quad (\because\ f(x)=x^2)\\
&=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ①\\
&=\frac{1}{2}\left(1+a\cdot\frac{1}{a^2}+b\cdot\frac{1}{b^2}\right)^2 \quad (\because\ p+q=1)\\
&=\frac{1}{2}\left\{1+af\left(\frac{1}{a}\right)+bf\left(\frac{1}{b}\right)\right\}^2\\
&\geqq \frac{1}{2}\left\{1+f\left(a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \quad (\because\ (1)\text{ の不等式})\\
&=\frac{1}{2}\{1+f(2)\}^2\\
&=\frac{1}{2}(1+2^2)^2\\
&=\frac{25}{2} \qquad \cdots\cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

が成り立つ．

- ① 以降は次のようにしてもよい．

$$① = \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{b+a}{ab}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \quad (\because\ a+b=1)$$

$a>0,\ b>0$ より相加平均・相乗平均の関係を用いて

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad \therefore \quad \frac{1}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad (\because\ a+b=1)$$

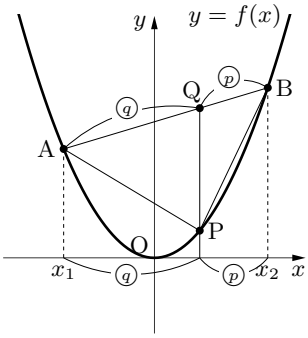
$$\therefore \quad \frac{1}{ab} \geqq 4$$

よって

$$① \geqq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{5}$$

が成り立つ．

- (1) の不等式は右図により得られる．



曲線 $y=f(x)$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ f(x_1))$，$\mathrm{B}(x_2,\ f(x_2))$ をとる．x 軸上の点 $(x_1,\ 0)$，$(x_2,\ 0)$ を $q:p\ (p>0,\ q>0,\ p+q=1)$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{px_1+qx_2}{p+q},\ 0\right) \text{ すなわち } (px_1+qx_2,\ 0)$$

である．y 軸に平行な直線 $x=px_1+qx_2$ と $y=f(x)$，線分 AB との交点をそれぞれ P，Q とおく．

$$(\mathrm{P}\text{ の } y \text{ 座標}) = f(px_1+qx_2)$$

$$(\mathrm{Q}\text{ の } y \text{ 座標}) = \frac{pf(x_1)+qf(x_2)}{p+q} = pf(x_1)+qf(x_2)$$

であり，$y=f(x)=x^2$ のグラフは下に凸であるから

$$(\mathrm{P}\text{ の } y \text{ 座標}) \leqq (\mathrm{Q}\text{ の } y \text{ 座標})$$

であり

$$f(px_1+qx_2) \leqq pf(x_1)+qf(x_2)$$

が成り立つ．等号は $x_1=x_2$ のとき成り立つ．

この不等式は $f(x)$ が下に凸で，$p,\ q$ が $p>0,\ q>0,\ p+q=1$ ならば，どんな関数であっても成り立つ不等式である．これはイェンゼンの不等式と呼ばれている．$f(x)$ が上に凸のときは不等式の向きが逆になる．