a，b は実数で

$$a^2+b^2=16,\quad a^3+b^3=44$$

をみたしている．このとき，

(1) $a+b$ の値を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ．

(97 東京大 文 1)

【答】

(1) $a+b=2$

(2) 略

【解答】

$$(*)\begin{cases}a^2+b^2=16\\a^3+b^3=44\end{cases}$$

(1) $a+b=u$，$ab=v$ とおく．

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=u^2-2v$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=u^3-3uv$$

であるから

$$(*)\iff\begin{cases}u^2-2v=16\\u^3-3uv=44\end{cases}\iff\begin{cases}v=\dfrac{1}{2}u^2-8 & \cdots\cdots①\\u^3-3u\left(\dfrac{1}{2}u^2-8\right)=44 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

② を解くと

$$-\frac{1}{2}u^3+24u=44$$

$$u^3-48u+88=0$$

$$(u-2)(u^2+2u-44)=0$$

$$\therefore\quad u=2,\ -1\pm3\sqrt{5}$$

a，b は実数で 2 次方程式 $x^2-ux+v=0$ の解なので，判別式を D とおくと $D\geqq0$ である．

$$D=u^2-4v=u^2-4\left(\frac{1}{2}u^2-8\right)\quad(\because\ ①)$$

$$=32-u^2$$

であり

$u=2$ は $D\geqq0$ を満たす．

$u=-1\pm3\sqrt{5}$ のとき

$$32-u^2=32-(44-2u)=2u-12=-14\pm6\sqrt{5}=2(-\sqrt{49}\pm\sqrt{45})<0$$

であり，$D\geqq0$ を満たさない．

よって

$$u=2,\quad v=\frac{1}{2}\cdot2^2-8=-6$$

であり

$$\boldsymbol{a+b=2},\quad ab=-6 \qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$
\begin{aligned}
a^k+b^k &= (a+b)(a^{k-1}+b^{k-1})-ab(a^{k-2}+b^{k-2})\\
&= 2(a^{k-1}+b^{k-1})+6(a^{k-2}+b^{k-2}) \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

となる．③ を用いて，n が 2 以上の整数のとき

$$a^n+b^n \text{ は 4 で割り切れる整数である} \qquad \cdots\cdots (*)$$

ことを数学的帰納法で証明する．

(ｉ) $n=2,\ 3$ のとき
条件 $a^2+b^2=16,\ a^3+b^3=44$ より，確かに $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k-2,\ k-1$ のときに $(*)$ が成り立つと仮定すると，③より，$n=k$ のときも $(*)$ が成り立つ．

以上より，すべての $n \geqq 2$ に対して，$(*)$ は成り立つ．　　　　　　　　　　…… (証明終わり)

- (1) で得た $a+b=2$，$ab=-6$ より $a,\ b$ は $x^2-2x-6=0$ の解なので

  $$a^2-2a-6=0, \quad b^2-2b-6=0$$

  が成り立つ．それぞれの両辺に $a^{k-2},\ b^{k-2}$ をかけると

  $$a^k-2a^{k-1}-6a^{k-2}=0, \quad b^k-2b^{k-1}-6b^{k-2}=0$$

  となるので，辺々加えて移項すると③となる．