

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は $\frac{\square}{x-1} - 1$ であり, 合成関数 $f \circ f(x)$ は $\frac{\square}{x}$ である.

(99 東邦大 理)

【答】

-2	-1

【解答】

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

① を x について解くと

$$\textcircled{1} \iff (x+1)y = x-1 \iff (y-1)x = -y-1$$

$y-1 \neq 0$ が確認されるから

$$x = \frac{-y-1}{y-1}$$

となる.

よって, 逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{-(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} - 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

また, 合成関数 $f \circ f(x)$ は

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} \\ &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)+(x+1)} \\ &= \frac{-2}{2x} \\ &= \frac{-1}{x} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.