関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} x^4-x^2+6 & (|x|\leqq 1) \\ \dfrac{12}{|x|+1} & (|x|>1) \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+\frac{7}{2} \quad (|x|\leqq 2)$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$, $g(x)$ の増減を調べ，2 曲線 $C_1 : y=f(x)$，$C_2 : y=g(x)$ のグラフの概形を同じ座標平面上にかけ．

(2) $C_1$, $C_2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(00 静岡大 理・工・情報 4)

---

【答】

(1) 略

(2) $24\log\dfrac{3}{2}-\dfrac{34}{15}$

---

【解答】

(1) $f(x)$ は偶関数であり，$x>1$ では減少するので，$0\leqq x\leqq 1$ での増減を調べる．

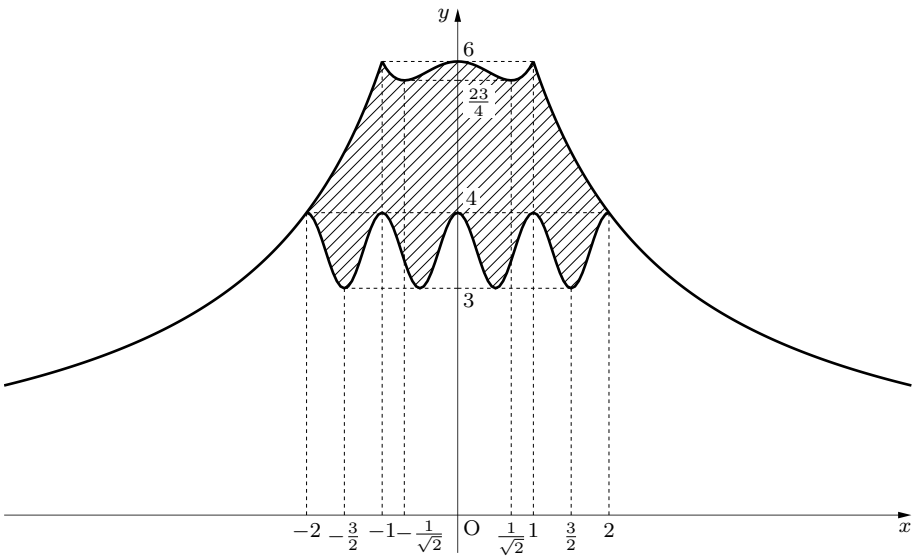
$$f'(x)=4x^3-2x$$
$$=2x(x^2-2)$$

$0\leqq x\leqq 1$ での増減は右表となる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $6$ | $\searrow$ | $\dfrac{23}{4}$ | $\nearrow$ | $6$ |

$g(x)$ も偶関数であり，周期が 1 の関数である．

よって，2 曲線 $C_1 : y=f(x)$，$C_2 : y=g(x)$ のグラフの概形を同じ座標平面上にかくと下図となる．



(2) $C_1$, $C_2$ で囲まれた部分は (1) の図の斜線部分であり，$y$ 軸に関して対称である．求める面積を $S$ とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= 2\left\{\int_0^1 (x^4 - x^2 + 6)\,dx + \int_1^2 \frac{12}{x+1}\,dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\cos 2\pi x + \frac{7}{2}\right)dx\right\} \\
&= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 6x\right]_0^1 + 2\Big[12\log|x+1|\Big]_1^2 - \left[\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} + 7x\right]_0^2 \\
&= -\frac{4}{15} + 12 + 24(\log 3 - \log 2) - 14 \\
&= \boldsymbol{24\log\frac{3}{2} - \frac{34}{15}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$