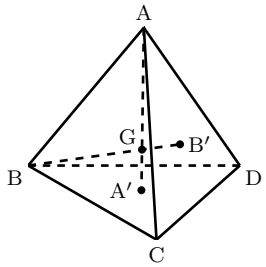
四面体には頂点とその頂点を含まない面の重心を結ぶ線分が合計 4 本ある．これらの 4 本の線分は 1 点で交わることを示せ．

(00 大阪女大 後 理 4)

【答】 略

【解答】

四面体の頂点を A，B，C，D とし，△BCD，△ACD，△DAB，△ABC の重心をそれぞれ A′，B′，C′，D′ とする．



まず

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AA'}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}) - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB'}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB'}} - 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AB'}}) \\ &= \frac{4}{3}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AB'}}}{4}\end{aligned}$$

が成り立つ．

線分 BB′ を 3 : 1 に内分する点を G とおくと，G は線分 BB′ 上の点であり，また $\overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ より，G は線分 AA′ 上の点でもある．すなわち，2 本の線分 AA′，BB′ は点 G で交わる．

同じく，線分 CC′，DD′ も線分 AA′ と点 G で交わる．

以上より，4 本の線分 AA′，BB′，CC′，DD′ は 1 点 G で交わる．　　…… (証明終わり)

- 点 G を O を始点とした位置ベクトルで表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3 \times \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})\right\} \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})\end{aligned}$$

となる．この点 G は四面体 ABCD の重心と呼ばれている．