(1) 方程式

$$z^3 = 2 + 2i \qquad \cdots\cdots ①$$

を解こう．

複素数 $2+2i$ を極形式で表すと

$$2 + 2i = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}\left(\cos\boxed{ウエ}^\circ + i\sin\boxed{ウエ}^\circ\right)$$

となる．

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおき，① を満たす r，θ $(r > 0,\ 0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ を求めると

$$r = \sqrt{\boxed{オ}}$$

$$\theta = \boxed{カキ}^\circ,\ \boxed{クケコ}^\circ,\ 225^\circ$$

となる．

したがって，複素数平面上の第 2 象限にある ① の解は

$$-\boxed{サ} + i$$

である．

(2) 次に方程式

$$z^6 - 4z^3 + 8 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

の解について考えよう．

② は $(z^3-2)^2 = -\boxed{シ}$，すなわち

$$z^3 = 2 \pm \boxed{ス}\,i$$

となるから，(1) と同様に考えると，第 2 象限にある ② の解は (1) で求めた

$$-\boxed{サ} + i$$

と

$$\frac{\boxed{セ} - \sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}} + \frac{\boxed{チ} - \sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}i$$

の 2 個であり，他の解は第 1 象限に 1 個，第 3 象限に $\boxed{ト}$ 個，第 4 象限に $\boxed{ナ}$ 個存在する．

注 この問題において複素数平面の象限とは，実軸を x 軸，虚軸を y 軸とした座標平面における象限のことをいう．

(01 センター試験 本試験 IIB 4)

【答】

ア	イ	ウエ	オ	カキ	クケコ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
2	2	45	2	15	135	1	4	2	1	3	2	1	3	2

ト	ナ
2	1

【解答】

(1) $$z^3 = 2+2i \quad \cdots\cdots ①$$

複素数 $2+2i$ を極形式で表すと

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \mathbf{2\sqrt{2}}(\cos\mathbf{45}^\circ + i\sin 45^\circ) \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r>0,\ 0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$$

とおくと，ド・モアブルの定理より $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ となるから

$$① \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

$$\therefore \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\theta = 45^\circ + 360^\circ \times n \quad (n=0,\ 1,\ 2) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \\ \theta = \mathbf{15}^\circ,\ \mathbf{135}^\circ,\ 255^\circ \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

したがって，複素数平面上の第 2 象限にある①の解は $\theta = 135^\circ$ のときで

$$z = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = -\mathbf{1}+i \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $$z^6 - 4z^3 + 8 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

② は $(z^3-2)^2 = -\mathbf{4}$，すなわち ……(答)

$$z^3 - 2 = \pm\sqrt{-4} \qquad \therefore \quad z^3 = 2 \pm \mathbf{2}i \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．$z^3 = 2-2i$ を (1) と同様に考えて解く．

$z = r'(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r'>0,\ 0^\circ \leqq \varphi < 360^\circ)$ とおくと，

$2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ であるから

$$z^3 = 2-2i \iff r'^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$$

$$\therefore \begin{cases} r'^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\varphi = 315^\circ + 360^\circ \times n \quad (n=0,\ 1,\ 2) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r' = \sqrt{2} \\ \varphi = 105^\circ,\ 225^\circ,\ 345^\circ \end{cases}$$

となる．よって，第 2 象限にある ② の解は (1) で求めた $-1+i$ と

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ) \\ &= \sqrt{2}\{(\cos 60^\circ\cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ) + i(\sin 60^\circ\cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ)\} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

の 2 個であり，他の解は

第 1 象限に 1 個，第 3 象限に **2** 個，第 4 象限に **1** 個 ……(答)

存在する．