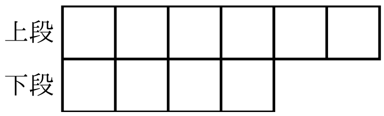
$n,\ k$ は正の整数 $(n \geqq k)$ で，$N = n + k$ とする．図のように，N 個の同じ大きさの空白の枠がある．



上段には n 個の枠があり，下段には k 個の枠がある．

上段と下段の左端はそろっており，各段の枠は隣との間にすき間はない．

図では，$n = 6,\ k = 4$ である．

1 から N までの N 個の自然数を各枠の中に 1 つずつ次の 2 つの条件を満たすように並べる．

(i) 各段においては，枠の中の数は右に行くに従って大きくなる．

(ii) 左から k 個の各列においては，下段の数は上段の数よりも大きい．

この 2 つの条件を満たすように 1 から N を並べる並べ方の数を $f(n,\ k)$ とする．このとき，

(1) $n > k \geqq 2$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ k) = f(n-1,\ k) + f(n,\ k-1)$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ n) = f(n,\ n-1)$$

(3) 次が成り立つことを示せ．

$$f(n,\ k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k\ \frac{n-k+1}{n+1}$$

(01 京都府医大 医 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) 2 つの条件 (i)，(ii) により，最大数 $N = n + k$ は上段の右端または下段の右端に置かれる．
$n > k \geqq 2$ のとき，N が

上段の右端に置かれるときの並べ方の数は　$f(n-1,\ k)$ 通り，

下段の右端に置かれるときの並べ方の数は　$f(n,\ k-1)$ 通り

あり，これらは同時には起こらないから

$$f(n,\ k) = f(n-1,\ k) + f(n,\ k-1)$$

が成り立つ．　　…… (証明終わり)

(2) $k = n\ (\geqq 2)$ のとき，N は下段の右端に置かれるから

$$f(n,\ n) = f(n,\ n-1)$$

が成り立つ．　　…… (証明終わり)

(3) 正の整数 $n,\ k\ (n \geqq k)$ で $N=n+k$ であるとき

$$f(n,\ k) = {}_{n+k}\mathrm{C}_k\,\frac{n-k+1}{n+1} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つことを N についての数学的帰納法で示す．

(i) $N=1+1=2$ のとき

$(n,\ k)=(1,\ 1)$ であり，条件を満たすのは上段に 1 下段に 2 を置く並べ方のみであり

$$f(1,\ 1)=1$$

である．また

$$((*)\ \text{の右辺}) = {}_{1+1}\mathrm{C}_1\,\frac{1-1+1}{1+1} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

である．したがって，$N=2$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $N=M$ での成立を仮定する．すなわち $n+k=M$ のとき $(*)$ は成立するものと仮定する．$N=n+k=M+1$ のときを考察する．

(ア) $n>k \geqq 2$ のとき，(1) より

$$f(n,\ k) = f(n-1,\ k) + f(n,\ k-1)$$

$(n-1)+k = n+k-1 = (M+1)-1 = M$，同じく $n+(k-1)=M$ であり，右辺の 2 項に対し帰納法の仮定を用いることができるから

$$\begin{aligned}
f(n,\ k) &= {}_{n-1+k}\mathrm{C}_k\cdot\frac{(n-1)-k+1}{(n-1)+1} + {}_{n+(k-1)}\mathrm{C}_{k-1}\cdot\frac{n-(k-1)+1}{n+1}\\
&= {}_{n+k-1}\mathrm{C}_k\cdot\frac{n-k}{n} + {}_{n+k-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot\frac{n-k+2}{n+1}\\
&= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\cdot\frac{n-k}{n} + \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}\cdot\frac{n-k+2}{n+1}\\
&= \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,\frac{n}{n+k}\cdot\frac{n-k}{n} + \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,\frac{k}{n+k}\cdot\frac{n-k+2}{n+1}\\
&= {}_{n+k}\mathrm{C}_k\left\{\frac{n-k}{n+k} + \frac{k(n-k+2)}{(n+k)(n+1)}\right\}\\
&= {}_{n+k}\mathrm{C}_k\,\frac{n^2-k^2+n+k}{(n+k)(n+1)}\\
&= {}_{n+k}\mathrm{C}_k\,\frac{n-k+1}{n+1}
\end{aligned}$$

$N=M+1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(イ) $k=n$ かつ $n+n=M+1$ のとき，(2) より

$$f(n,\ n) = f(n, n-1)$$

$n+(n-1) = (n+n)-1 = (M+1)-1 = M$ であり，帰納法の仮定を用いることができるから

$$\begin{aligned}
f(n,\ n) &= {}_{n+(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}\cdot\frac{n-(n-1)+1}{n+1} = {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}\cdot\frac{2}{n+1}\\
&= \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}\cdot\frac{2}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{n}{2n}\cdot\frac{2}{n+1}\\
&= {}_{2n}\mathrm{C}_n\,\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

である．一方

$$((*)\ \text{の右辺}) = {}_{n+n}\mathrm{C}_n\,\frac{n-n+1}{n+1} = {}_{2n}\mathrm{C}_n\,\frac{1}{n+1}$$

$N=M+1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ウ) $k=1$ かつ $n+1=M+1$ のとき，1 個ある下段には 2 から $N=n+1$ のいずれかが置かれ，下段の数が決まれば上段の数の並べ方は一通りに決まるから

$$f(n,\ 1)=n$$

である．一方

$$((*)\text{ の右辺})={}_{n+1}\mathrm{C}_1\frac{n-1+1}{n+1}=(n+1)\frac{n}{n+1}=n$$

$N=M+1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

したがって，(ア)〜(ウ) より，$N=M+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，$(*)$ は成り立つ． …… (証明終わり)