2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = (x-a)^2 + b \quad (a \neq 0)$$

と 1 点ずつを共有する放物線

$$C : y = p(x-q)^2 + r \quad (p \neq 1)$$

を考える．C_i と C との共有点を $\mathrm{P}_i(x_i,\ y_i)$ とする．このとき，$x_1 \neq x_2$ であることを示せ．さらに，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きを $a,\ b$ のみの式で表せ．

(02 東北大 後 法・経 4)

【答】 証明は略．傾きは $\dfrac{b}{a}$

【解答】

$C_1,\ C$ を連立すると

$$(p-1)x^2 - 2pqx + pq^2 + r = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$p \neq 1$ かつ C_1 と C の共有点が 1 つであることから①は重解をもつ．(判別式) $= 0$ より

$$p^2q^2 - (p-1)(pq^2 + r) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

また，$C_2,\ C$ を連立すると

$$(p-1)x^2 - 2(pq-a)x + pq^2 + r - a^2 - b = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$p \neq 1$ かつ C_2 と C の共有点が 1 つであることから③は重解をもつ．(判別式) $= 0$ より

$$(pq-a)^2 - (p-1)(pq^2 + r - a^2 - b) = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

①，③の重解がそれぞれ x_1，x_2 であり

$$x_1 = \frac{pq}{p-1}, \quad x_2 = \frac{pq-a}{p-1} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．$a \neq 0$ より $x_1 \neq x_2$ である． ……(証明終わり)

$\mathrm{P}_1(x_1,\ p(x_1-q)^2+r)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ p(x_2-q)^2+r)$ であり $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きを m とすると

$$\begin{aligned} m &= \frac{p(x_1-q)^2 - p(x_2-q)^2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{p(x_1-x_2)(x_1+x_2-2q)}{x_1-x_2} \\ &= p(x_1+x_2-2q) \\ &= p\left(\frac{2pq-a}{p-1} - 2q\right) \quad (\because ⑤) \\ &= \frac{p(2q-a)}{p-1} \end{aligned}$$

ここで，② − ④ として r を消去すると

$$\begin{aligned} &2apq - a^2 - (p-1)(a^2+b) = 0 \\ &2apq - pa^2 - (p-1)b = 0 \\ &ap(2q-a) = (p-1)b \\ &\frac{p(2q-a)}{p-1} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

よって $\quad m = \boldsymbol{\dfrac{b}{a}}$ ……(答)