n を自然数とするとき，$m \leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする．

(1) $f(15)$ を求めよ．

(2) p, q を互いに異なる素数とする．このとき $f(pq)$ を求めよ．

(03 名古屋大 文系 3)

【答】

(1) 8

(2) $f(pq) = (p-1)(q-1)$

【解答】

(1) m と n の最大公約数が 1 であるとは，m と n が互いに素ということである．

$15 = 3 \times 5$ であるから，15 以下の自然数で 3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると，15 と互いに素でないものは，3 または 5 の倍数であり，この個数 $n(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= \frac{15}{3} + \frac{15}{5} - \frac{15}{3 \cdot 5} \\ &= 5 + 3 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

である．よって，求める個数 $f(15)$ は

$$f(15) = 15 - 7 = \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) p, q は素数であるから，pq 以下の自然数で pq と互いに素でないものの個数は，(1) と同じようにして

$$\frac{pq}{p} + \frac{pq}{q} - \frac{pq}{pq} = q + p - 1$$

であり，求める個数 $f(pq)$ は

$$\begin{aligned} f(pq) &= pq - (q + p - 1) \\ &= pq - p - q + 1 \\ &= \boldsymbol{(p-1)(q-1)} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．