(1) 正の整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す．たとえば，$d(5)=2$，$d(6)=4$ であり，$d(32)=\boxed{\text{(シ)}}$，$d(72)=\boxed{\text{(ス)}}$ である．

一般に，n が素数 p の累乗として $n=p^k$ (k は正の整数) と表されるとき，$d(n)=\boxed{\text{(セ)}}$ である．上で求めた $d(32)$ はこの例である．

次に，n が 2 個の異なる素数 p_1，p_2 と正の整数 k_1，k_2 を用いて $n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}$ と表されるとき，$d(n)=\boxed{\text{(ソ)}}$ である．上で求めた $d(72)$ はこの例である．

さらに，n が r 個の異なる素数 p_1，p_2，$\cdots$，p_r と正の整数 k_1，k_2，$\cdots$，k_r により $n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_r}^{k_r}$ と素因数分解されるとき，$d(n)$ を k_1，k_2，$\cdots$，k_r を用いて表すと $d(n)=\boxed{\text{(タ)}}$ となる．

(2) $d(n)$ が奇数であることは，n がある整数 m を用いて $n=m^2$ と表されることと同値であることを証明し，それを $\boxed{\text{(チ)}}$(解答用紙省略) に書きなさい．

(03 慶應大 理工 3)

【答】

(シ)	(ス)	(セ)	(ソ)	(タ)	(チ)
6	12	$k+1$	$(k_1+1)(k_2+1)$	$(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1)$	略

【解答】

(1) $32=2^5$ の約数は

$$2^i \quad (i \text{ は } 0 \leqq i \leqq 5 \text{ をみたす整数})$$

であるから

$$d(32)=\mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$72=2^3 3^2$ の約数は

$$2^i 3^j \ (i,\ j \text{は } 0 \leqq i \leqq 3,\ 0 \leqq j \leqq 2 \text{ をみたす整数})$$

であるから

$$d(72)=4\cdot 3=\mathbf{12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

一般に，$n=p^k$ (p は素数，k は正の整数) のとき，n の約数は

$$p^i \quad (i \text{ は } 0 \leqq i \leqq k \text{ をみたす整数})$$

であるから

$$d(n)=\boldsymbol{k+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

次に，$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}$ (p_1，p_2 は相異なる素数，k_1，k_2は正の整数) のとき，n の約数は

$${p_1}^i{p_2}^j \quad (i,\ j \text{ は } 0 \leqq i \leqq k_1,\ 0 \leqq j \leqq k_2 \text{ をみたす整数})$$

であるから

$$d(n)=\boldsymbol{(k_1+1)(k_2+1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

さらに，$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_r}^{k_r}$ (p_1，p_2，$\cdots$，p_r は互いに異なる素数，k_1，k_2，$\cdots$，k_r は正の整数) のとき，n の約数は

$${p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_r}^{i_r}$$

(i_1，i_2，$\cdots$，i_r は $0\leqq i_1\leqq k_1$，$0\leqq i_2\leqq k_2$，$\cdots$，$0\leqq i_r\leqq k_r$ をみたす整数)

であるから

$$d(n)=\boldsymbol{(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1)} \quad \cdots\cdots ①$$ ……(答)

(2) 任意の整数 n は，$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_r}^{k_r}$ (p_1，p_2，$\cdots$，p_r は互いに異なる素数, k_1，k_2，$\cdots$，k_r は正の整数) とおけるから，① より

$d(n)$ が奇数である

$\Longleftrightarrow (k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1)$ が奇数である

$\Longleftrightarrow k_1+1$，$k_2+1$，$\cdots$，$k_r+1$ がすべて奇数である

$\Longleftrightarrow k_1$，k_2，$\cdots$，k_r がすべて偶数である

$\Longleftrightarrow n(={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_r}^{k_r})$ は平方数である

$\Longleftrightarrow n$ はある整数 m を用いて $n=m^2$ と表される

すなわち,「$d(n)$ が奇数である」ことと「n がある整数 m を用いて $n=m^2$ と表される」ことは同値である. …… (証明終わり)