a を正の実数とする．$x \geqq 0$ のとき，$y = \dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(05 岡山大 理系 1(1))

【答】 $0 < a < 1$ のとき　　$y \leqq -\dfrac{1}{a}$ または $-a < y$

$a = 1$ のとき　　$y = -1$

$a > 1$ のとき　　$y < -a$ または $-\dfrac{1}{a} \leqq y$

【解答】

$$y = \frac{ax-1}{a-x} = -\frac{a(x-a)+a^2-1}{x-a} = -a - \frac{a^2-1}{x-a} \quad (x \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

a は正の実数より $a^2-1 > -1$ である．a^2-1 の符号で場合分けする．

(i) $a = 1$ のとき，① $\iff$ $y = -1$ であり，y がとりうる値の範囲は

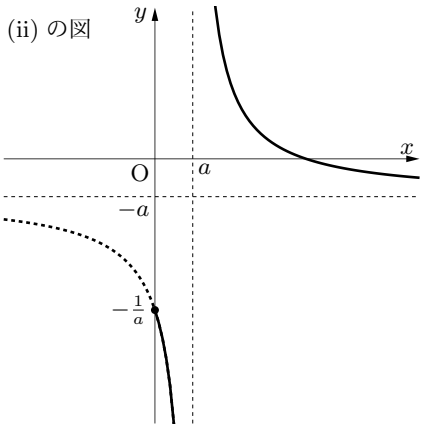
$$y = -1$$

である．

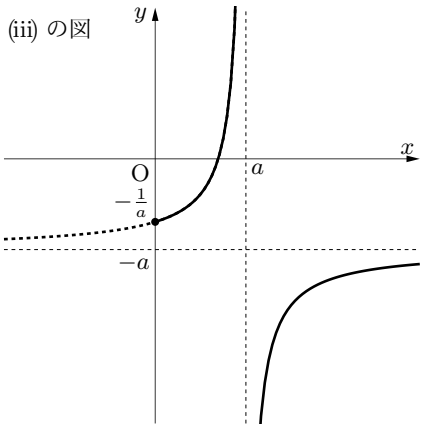
(ii) $0 < a < 1$ のとき，$a^2-1 < 0$ であり，①のグラフは下図 (ii) となる．

(iii) $a > 1$ のとき，$a^2-1 > 0$ であり，①のグラフは下図 (iii) となる．

(ii) の図



(iii) の図



よって，y がとり得る値の範囲は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < 1} \text{ のとき} & \boldsymbol{y \leqq -\dfrac{1}{a}} \text{ または } \boldsymbol{-a < y} \\ \boldsymbol{a = 1} \text{ のとき} & \boldsymbol{y = -1} \\ \boldsymbol{a > 1} \text{ のとき} & \boldsymbol{y < -a} \text{ または } \boldsymbol{-\dfrac{1}{a} \leqq y} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．