1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を $\varphi(n)$ とする．ただし，自然数 a と b が互いに素であるとは，a と b の最大公約数が 1 になることである．

(1) $\varphi(10)$ を求めよ．
(2) p を素数，k を自然数とするとき，$\varphi(p^k)$ を求めよ．
(3) $\varphi(100)$ を求めよ．
(4) $\varphi(1500)$ を求めよ．

(05 佐賀大 理工 1)

【答】

(1) $\varphi(10) = 4$
(2) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
(3) $\varphi(100) = 40$
(4) $\varphi(1500) = 400$

【解答】

(1) $10 = 2 \times 5$ であるから 1 から 10 までの自然数のうち，2 または 5 で割り切れる数は

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 5$$

であるから，2 でも 5 でも割りきれない数は

$$1,\ 3,\ 7,\ 9$$

の 4 個である．よって

$$\varphi(10) = \mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $p^k = p \times p^{k-1}$ であるから p が素数のとき 1 から p^k までの自然数のうちに p の倍数は

$$1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ 3 \cdot p,\ \cdots,\ p^{k-1} \cdot p$$

の p^{k-1} 個あるから

$$\varphi(p^k) = \boldsymbol{p^k - p^{k-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $100 = 2^2 \cdot 5^2$ である．1 から 100 までの自然数のうちで 2 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とする．集合 X の要素の個数を $n(X)$ とする．

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= \frac{100}{2} + \frac{100}{5} - \frac{100}{2 \cdot 5} \\ &= 50 + 20 - 10 \\ &= 60 \end{aligned}$$

であるから

$$\varphi(100) = 100 - n(A \cup B) = 100 - 60 = \mathbf{40} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$ である．1 から 1500 までの自然数のうちで 2, 3, 5 の倍数の集合を順に A, B, C とすると

$$
\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C) \\
=&n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\
=&\frac{1500}{2} + \frac{1500}{3} + \frac{1500}{5} - \frac{1500}{2 \cdot 3} - \frac{1500}{3 \cdot 5} - \frac{1500}{2 \cdot 5} + \frac{1500}{2 \cdot 3 \cdot 5} \\
=&750 + 500 + 300 - 250 - 100 - 150 + 50 \\
=&1100
\end{aligned}
$$

であるから

$$\varphi(1500) = 1500 - n(A \cup B \cup C) = 1500 - 1100 = \mathbf{400} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$