自然数 n に対して，n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 であるような自然数の個数を $f(n)$ とする．

例えば，$n=12$ に対しては，このような自然数は，1，5，7，11 の 4 個なので，$f(12)=4$ である．また，$f(1)=1$，素数 p に対しては $f(p)=p-1$ である．

次の問に答えよ．

(1) $f(77)$ の値を求めよ．

(2) $f(pq)=24$ となる 2 つの素数 $p,\ q$ (ただし，$p<q$ とする) の組を求めよ．

(3) $k,\ n$ を自然数とするとき，$f(2^k3^n)$ の値を k と n の式で表せ．

(05 早稲田大 社会科学 3)

【答】

(1) 60

(2) $(p,\ q)=(3,\ 13),\ (5,\ 7)$

(3) $f(2^k3^n)=2^k3^{n-1}$

【解答】

(1) n との最大公約数が 1 である自然数とは，n と互いに素な自然数のことである．

$77=7\times 11$ であるから，77 以下の自然数で 7 の倍数の集合を A，11 の倍数の集合を B とすると，77 と互いに素でないものは，7 または 11 の倍数であり，この個数 $n(A\cup B)$ は

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= \frac{77}{7}+\frac{77}{11}-\frac{77}{7\cdot 11} \\ &= 11+7-1 \\ &= 17 \end{aligned}$$

である．よって，求める個数 $f(77)$ は

$$f(77)=77-17=\mathbf{60} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $p,\ q$ は素数であるから，pq 以下の自然数で pq と互いに素でないものの個数は，(1) と同じようにして

$$\frac{pq}{p}+\frac{pq}{q}-\frac{pq}{pq}=q+p-1$$

$$\therefore\quad f(pq)=pq-q-p+1$$

$f(pq)=24$ より

$$pq-q-p+1=24 \iff (p-1)(q-1)=24$$

$0<p<q$ より

$$(p-1,\ q-1)=(1,\ 24),\ (2,\ 12),\ (3,\ 8),\ (4,\ 6)$$

$$\therefore\quad (p,\ q)=(2,\ 25),\ (3,\ 13),\ (4,\ 9),\ (5,\ 7)$$

$p,\ q$ は素数であるから

$$(p,\ q)=\mathbf{(3,\ 13),\ (5,\ 7)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (1)，(2) と同様に考えて

$$\begin{aligned} f(2^k3^n) &= 2^k3^n - \left(\frac{2^k3^n}{2} + \frac{2^k3^n}{3} - \frac{2^k3^n}{2\cdot 3}\right) \\ &= 2^k3^n\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \boldsymbol{2^k3^{n-1}} \end{aligned}$$

……(答)

- $f(n)$ はオイラーの関数と言われるもので，$n = n_1n_2$ (n_1 と n_2 が互いに素) であるとき

$$f(n_1n_2) = f(n_1)f(n_2)$$

が成り立つことが知られている．これを用いると

$$\begin{aligned} f(2^k3^n) = f(2^k)f(3^n) &= \left(2^k - \frac{2^k}{2}\right)\left(3^n - \frac{3^n}{3}\right) \\ &= 2^k3^n\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 2^k3^n\,\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \\ &= 2^k3^{n-1} \end{aligned}$$