極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ が存在するためには $a=\boxed{}$ でなくてはならない．

(05 奈良県医大 1(2))

【答】

$-\dfrac{5}{9}$

【解答】

第 n 部分和 S_n を整理すると

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k}{\sqrt{n^2+1}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\{a+\left(\frac{1}{n}+\frac{a}{\sqrt{n^2+1}}\right)k+\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}k^2\right\}\\
&= an+\left(\frac{1}{n}+\frac{a}{\sqrt{n^2+1}}\right)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&= an+\frac{n+1}{2}+\frac{an(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^2+1}}\\
&= (n+1)\left(a\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{an}{2\sqrt{n^2+1}}+\frac{2n+1}{6\sqrt{n^2+1}}\right)
\end{aligned}$$

$n\to\infty$ のとき，$n+1\to\infty$ であるから，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ が存在するためには

$$\lim_{n\to\infty}\left(a\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{an}{2\sqrt{n^2+1}}+\frac{2n+1}{6\sqrt{n^2+1}}\right)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が必要である．

$$\lim_{n\to\infty}a\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+\frac{1}{n}}=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an}{2\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{6\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{6\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{3}$$

であるから

$$① \iff a+\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{3}=0$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}a+\frac{5}{6}=0 \qquad \therefore\quad a=\boldsymbol{-\frac{5}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

でなくてはならない．

- $a = -\dfrac{5}{9}$ のとき

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(-\frac{5}{9}\cdot\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}-\frac{5n}{18\sqrt{n^2+1}}+\frac{2n+1}{6\sqrt{n^2+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{5}{9}n+\frac{1}{2}(n+1)+\frac{(n+1)(n+3)}{18\sqrt{n^2+1}}\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}n+\frac{n^2+4n+3}{18\sqrt{n^2+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}n+\frac{1}{18}\sqrt{n^2+1}+\frac{4n+2}{18\sqrt{n^2+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{18}+\frac{4n+2}{18\sqrt{n^2+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{(n^2+1)-n^2}{18(\sqrt{n^2+1}+n)}+\frac{4+\dfrac{2}{n}}{18\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}\right)\\
&= \frac{1}{2}+0+\frac{4}{18}\\
&= \frac{13}{18}
\end{aligned}
$$

である.