$a_n = \cos \dfrac{2n\pi}{3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，無限級数の和

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

を求めよ．

(05 東北学院大 工 数学 III 1)

【答】 $-\dfrac{2}{37}$

【解答】

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ とおく．$\{a_n\}$ は $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，1 を繰り返すから

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{3k-2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{3k-1}} + 1 \cdot \frac{1}{10^{3k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-100 - 10 + 2}{2 \cdot 10^{3k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{54}{10^{3k}} \right) \\ &\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} -\frac{54}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{10^3}} = -\frac{54}{999} = -\frac{2}{37} \end{aligned}$$

また，$S_{3n+1} = S_{3n} - \dfrac{1}{2 \cdot 10^{3n+1}}$，$S_{3n+2} = S_{3n} - \dfrac{1}{2 \cdot 10^{3n+1}} - \dfrac{1}{2 \cdot 10^{3n+2}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} S_{3n} = -\frac{2}{37}$$

が成り立ち

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{2}{37}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\alpha = \cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ とおくと

  $$\alpha^n = \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} \quad (\because\ ド・モアブルの定理)$$

  であり，$a_n = \cos \dfrac{2n\pi}{3}$ は α^n の実部であり，無限級数の和 $\dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{a_3}{10^3} + \cdots$ は複素数の無限等比級数 $S = \dfrac{\alpha}{10} + \left(\dfrac{\alpha}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha}{10}\right)^3 + \cdots$ の実部である．

  $0 < \left| \dfrac{\alpha}{10} \right| = \dfrac{1}{10} < 1$ だから

  $$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha}{10} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{10}} = \frac{\alpha}{10 - \alpha} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{20 - (-1 + \sqrt{3}\,i)} = \frac{(-1 + \sqrt{3}\,i)(21 + \sqrt{3}\,i)}{(21 - \sqrt{3}\,i)(21 + \sqrt{3}\,i)} \\ &= \frac{-24 + 20\sqrt{3}\,i}{444} = \frac{-6 + 5\sqrt{3}\,i}{111} \end{aligned}$$

  である．よって，求める和は

  $$\frac{-6}{111} = \boldsymbol{-\frac{2}{37}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

  である．