$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ に対し，$\{a_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を初項 1，公比 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2$ の等比数列とする．$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき無限等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．また，無限等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する θ の値の範囲を求めよ．

(05 福岡大 理)

【答】 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{7\pi}{6}$

【解答】

$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = \sqrt{3} - 2$$

$0 < |\sqrt{3} - 2| < 1$ であるから，初項 1，公比 $\sqrt{3} - 2$ の無限等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-(\sqrt{3}-2)} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

また，(初項) $\neq 0$ であるから，無限等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する条件は

$$-1 < (\text{公比}) < 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

$$(\text{公比}) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 2$$

であるから

$$① \iff -1 < 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 2 < 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} < \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{3}{2}$$

$-1 \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{2} < \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$$

である．$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすとき，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5\pi}{3}$ であり，θ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．