$0<r<1$ とする．

$$a_1=1-r,\quad a_{n+1}=ra_n+(1-r)r^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$ であることを用いて，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n$ の和を求めよ．

(05 秋田大 医 4)

【答】

(1) $a_n=n(1-r)r^{n-1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n=\dfrac{2r}{(1-r)^2}$

【解答】

(1) $$a_{n+1}=ra_n+(1-r)r^n$$

両辺を r^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{a_n}{r^n}+\frac{1-r}{r}$$

であり，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{r^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{r^1}=\dfrac{1-r}{r}$，公差 $\dfrac{1-r}{r}$ の等差数列である．

$$\frac{a_n}{r^n}=\frac{1-r}{r}+(n-1)\cdot\frac{1-r}{r}=n\cdot\frac{1-r}{r}$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{n(1-r)r^{n-1}}$$ ……(答)

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)a_k$ とおく．(1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(1-r)r^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}(k-1)kr^k\\&=0\cdot1r^0+1\cdot2r^1+2\cdot3r^2+\cdots+(n-1)nr^{n-1}\\&\qquad-0\cdot1r^1-1\cdot2r^2-\cdots-(n-2)(n-1)r^{n-1}-(n-1)nr^n\\&=2\{r+2r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}\}-(n-1)nr^n\end{aligned}$$

ここで，

$$T=r+2r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}$$

とおき

$$rT=\qquad r^2+\cdots+(n-2)r^{n-1}+(n-1)r^n$$

との差をつくると

$$\begin{aligned}(1-r)T&=r+r^2+\cdots+r^{n-1}-(n-1)r^n\\&=\frac{r(1-r^{n-1})}{1-r}-(n-1)r^n\quad (\because\ r\neq1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad T=\frac{r(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{(n-1)r^n}{1-r}$$

$$\therefore \quad S_n = 2\left\{\frac{r - r^n}{(1-r)^2} - \frac{(n-1)r^n}{1-r}\right\} - (n-1)nr^n$$

ここで，$0 < r < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)r^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)n^2 r^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)nr^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)n^2 r^n = 0$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{2r}{(1-r)^2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．