$m \fallingdotseq 0$ とし，原点を通る傾き $m$ の直線を $l$ とする．$l$ に原点で接するような放物線 $P : y = a(x-b)^2 + c$ を考える．

(1) $c$ を $b$ と $m$ で表せ．

(2) $l$ と原点で垂直に交わる直線を $l'$ とする．放物線 $P$ と $l'$ との原点以外の交点の座標を $b$ と $m$ で表せ．

(05 東北大 後 文系 2)

---

【答】

(1) $c = \dfrac{bm}{2}$

(2) $\left(\dfrac{2b(m^2+1)}{m^2},\ -\dfrac{2b(m^2+1)}{m^3}\right)$

---

【解答】

(1) $l$ の方程式は $y = mx$ である．放物線 $P$ は $l$ に原点で接するから

$$a(x-b)^2 + c = mx$$
$$ax^2 - (2ab+m)x + ab^2 + c = 0$$

は $x = 0$ を重解にもつ．$f(x) = ax^2 - (2ab+m)x + ab^2 + c$ とおくと

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2ab+m)^2 - 4a(ab^2+c) = 0 \\ ab^2 + c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2ab + m = 0 & \cdots\cdots ① \\ ab^2 + c = 0 \end{cases}$$

よって

$$c = -ab^2 = -\left(-\frac{m}{2}\right)b = \boldsymbol{\frac{bm}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 微分を利用してもよい．

$$P : y = a(x-b)^2 + c$$
$$l : y = mx$$

$g(x) = a(x-b)^2 + c$，$h(x) = mx$ とおくと，$P$ が $l$ に原点で接する条件は

$$\begin{cases} g(0) = h(0) \\ g'(0) = h'(0) \end{cases}$$

$g'(x) = 2a(x-b)$，$h'(x) = m$ であるから，この条件は

$$\begin{cases} ab^2 + c = 0 \\ -2ab = m \end{cases}$$

以下同じ．

(2) ① と $m \fallingdotseq 0$ より $b \fallingdotseq 0$ であり，$a = -\dfrac{m}{2b}$ である．さらに，(1) の結果をあわせると P の方程式は

$$y = -\frac{m}{2b}(x-b)^2 + \frac{bm}{2}$$
$$\therefore\quad y = -\frac{m}{2b}x^2 + mx$$

となる．また，$l$ と原点で垂直に交わる直線 $l'$ の方程式は

$$y=-\frac{1}{m}x$$

である．$P$ と $l'$ の交点では

$$-\frac{m}{2b}x^2+mx=-\frac{1}{m}x$$

が成り立つ．$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$-\frac{m}{2b}x+m=-\frac{1}{m}$$

$$\therefore\quad x=\frac{2b}{m}\left(m+\frac{1}{m}\right)=\frac{2b(m^2+1)}{m^2}$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{m}x=-\frac{2b(m^2+1)}{m^3}$$

よって，原点以外の交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{2b(m^2+1)}{m^2},\ -\frac{2b(m^2+1)}{m^3}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$