n を正の整数とする．実数 $x,\ y,\ z$ に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) $n = 1$ のとき，① を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ．

(2) $n = 3$ のとき，① を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ．

(06 東京大 文 3)

【答】

(1) $(1,\ 2,\ 3)$

(2) 略

【解答】

$$x^n + y^n + z^n = xyz \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $n = 1$ のとき，① は

$$x + y + z = xyz \qquad \cdots\cdots ①'$$

であり，$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ であるから

$$xyz \leqq z + z + z \qquad \therefore \quad xy \leqq 3 \qquad \therefore \quad x = 1$$

このとき

$$①' \iff 1 + y + z = yz$$
$$\therefore \quad (y-1)(z-1) = 2$$
$$\therefore \quad (y-1,\ z-1) = (1,\ 2)$$
$$\therefore \quad (y,\ z) = (2,\ 3)$$

$(x,\ y,\ z)$ のすべては

$$\mathbf{(1,\ 2,\ 3)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $xy \leqq 3$ より

  $$(x,\ y) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$$

  に絞られる．あとは ①′ に代入して，条件を満たす z を求めればよい．

(2) $n = 3$ のとき，① は

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyz \qquad \cdots\cdots ①''$$

であり，$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ であるから

$$x^3 + y^3 + z^3 > z^3$$
$$xyz \leqq z \cdot z \cdot z = z^3$$
$$\therefore \quad z^3 + y^3 + z^3 > xyz$$

よって，① を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しない． $\cdots\cdots$ (証明終わり)