次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える．

条件 (A)：$x,\ y,\ z$ は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす．

以下の問いに答えよ．

(1) 条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ．
(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件 (A) を満たすとする．このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ．
(3) 条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ．

(06 東京大 理 4)

【答】
(1) $(3,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 6)$
(2) 略
(3) 略

【解答】
正の整数 $x,\ y,\ z$ は

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xyz & \cdots\cdots ① \\ x \leqq y \leqq z & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす．

(1) y が与えられると，② により正の整数 x の値は絞られ，組 $(x,\ y)$ の候補は絞られる．x, y が決まると，z の 2 次方程式 ① を解くことにより z が決まる．① を z の 2 次方程式とみると

$$z^2-xy\cdot z+x^2+y^2=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &= (xy)^2-4(x^2+y^2) \\ &= x^2(y^2-4)-4y^2 \\ &= (x^2-4)(y^2-4)-16 \end{aligned}$$

z は実数であるから $D \geqq 0$ が必要である．
$y \leqq 3$ を満たす正の整数 y は $y=1,\ 2,\ 3$ である．各値について，$x,\ z$ を調べる．

(i) $y=1$ のとき，$x=1$ でもあり，$D=(-3)(-3)-16=-7<0$ であり，不適．
(ii) $y=2$ のとき，$D=(x^2-4)(4-4)-16=-16<0$ であり，不適．
(iii) $y=3$ のとき，$D=(x^2-4)(9-4)-16=5x^2-36 \geqq 0$ である．x が $1 \leqq x \leqq 3$ を満たす整数であることに注意すると $x=3$ に絞られる．このとき，①′ は

$$\begin{aligned} &z^2-9z+18=0 \\ &(z-3)(z-6)=0 \\ \therefore\quad &z=3,\ 6 \end{aligned}$$

以上 (i)，(ii)，(iii) より，求める組 $(x,\ y,\ z)$ のすべては

$$\mathbf{(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件 (A) を満たすとき，方程式

$$b^2+c^2+z^2=bcz$$
$$\therefore\quad t^2-bct+b^2+c^2=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

を考える．組 $(a,\ b,\ c)$ は ① を満たすから，a は ③ の解の一つである．もう一つの解を z とおくと，解と係数の関係より

$$a+z=bc \qquad \therefore\quad z=bc-a$$

である．$a,\ b,\ c$ は $a \leqq b \leqq c$ を満たす正の整数であり，さらに (1) の考察より $3 \leqq a \leqq b$ であるから

$$z \geqq b\cdot b-b=b(b-1)>0$$

である．したがって，z も正の整数であり，組 $(b,\ c,\ z)$ は ① を満たす．

また

$$z-c=(bc-a)-c \geqq bc-c-c=(b-2)c>0$$

であり，$c<z$，すなわち ② も満たす．

よって，条件 (A) を満たす組 $(a,\ b,\ c)$ に対し，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件 (A) を満たすような z が存在する． ……(証明終わり)

(3) 3 つの自然数の組列 $\{(a_n,\ b_n,\ c_n)\}$ $(n \geqq 1)$ を

$$\begin{cases} a_1=b_1=c_1=3 \\ a_{n+1}=b_n \\ b_{n+1}=c_n \\ c_{n+1}=b_nc_n-a_n \end{cases}$$

で決めると，(2) の結果よりすべての組 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ $(n \geqq 1)$ は条件 (A) を満たし，数列 $\{c_n\}$ $(n \geqq 1)$ は

$$c_1<c_2<\cdots<c_n<c_{n+1}<\cdots$$

を満たすから，c_n はすべて異なる，すなわち，組 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ はすべて異なる．

よって，条件 (A) を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在する． ……(証明終わり)