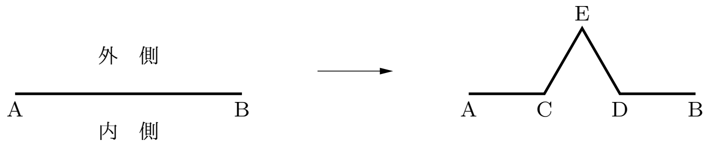
平面内に多角形が与えられたとき，その各辺に対し次の操作を施すことを考える：

(イ)	多角形の辺，それを仮に AB とすると，辺 AB を 3 等分する内点 C，D をこの順にとり，これら 2 点を頂点とする正三角形の C，D 以外の頂点を E とし，点 A，C，E，D，B を順に線分で結んでできる折れ線により，辺 AB をおきかえる．ただし，点 E は常に多角形の外側にとるものとする．

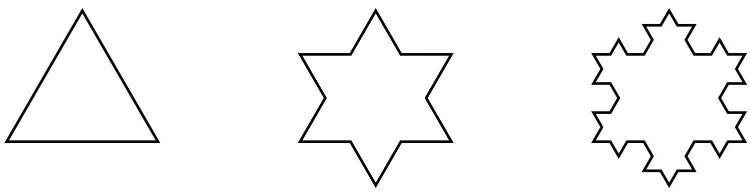


1 辺の長さが 1 の正三角形 T_0 の各辺に対し，上の操作 (イ) を施してできる多角形を T_1，T_1 の各辺に対し操作 (イ) を施してできる多角形を T_2，T_2 の各辺に対し操作 (イ) を施してできる多角形を T_3，以下同様にして，多角形 T_n から多角形 T_{n+1} をつくる．(次の図は左から順に，T_0, T_1, T_2 を描いたものである．) このとき次の問いに答えよ．

(1) 多角形 T_n に含まれる辺の個数 a_n および 1 辺の長さ l_n を，それぞれ n を用いて表せ.

(2) 多角形 T_n の面積 S_n を n を用いて表し，$n \to \infty$ のときの極限を調べよ.

(3) 多角形 T_n の周の長さ L_n を n を用いて表し，$n \to \infty$ のときの極限を調べよ.



(06 鳥取大 医 5)

【答】

(1) $a_n = 3 \cdot 4^n$，$l_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(2) $S_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{5} - \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$，極限は $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

(3) $L_n = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$，極限は $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

【解答】

(1) 操作 (イ) により，辺の個数は 4 倍になり，1 辺の長さは $\dfrac{1}{3}$ 倍になるから

$$a_{n+1} = 4a_n, \quad l_{n+1} = \frac{1}{3}l_n$$

が成り立つ．T_0 は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$a_0 = 3, \quad l_0 = 1$$

であり，$\{a_n\}$ は公比 4，初項 $a_0=3$ の等比数列，$\{l_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$，初項 $l_0=1$ の等比数列である．よって

$$a_n = a_0 \cdot 4^n = \boldsymbol{3 \cdot 4^n}, \quad l_n = l_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) T_{n+1} は，T_n に，1 辺の長さが l_{n+1} の正三角形を a_n 個付け加えた図形であるから

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_n \cdot \frac{1}{2} {l_{n+1}}^2 \sin 60^\circ \\ &= S_n + 3 \cdot 4^n \times \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

よって，$S_0 = \dfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ に注意すると，$n \geqq 1$ のとき

$$S_n = S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

であり，$n=0$ のときもこの結果は正しい．

$$S_n = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^n} \ (n \geqq 0) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

また

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1) より

$$L_n = a_n l_n = 3 \cdot 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{3\left(\frac{4}{3}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} L_n = \boldsymbol{\infty} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．