

- (1) 定積分 $\int_0^\pi (\pi - x) \sin 3x \, dx$ 求めよ.
- (2) a は実数全体を動くとする. $\int_0^\pi (\pi - x - a \sin 3x)^2 \, dx$ の最小値を求め, そのときの a の値も求めよ.

(06 群馬大 教育 5)

【答】

- (1) $\frac{\pi}{3}$
- (2) $a = \frac{2}{3}$ のとき, 最小値 $\frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{9}$

【解答】

- (1) 部分積分する.

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi (\pi - x) \sin 3x \, dx \\ &= \left[(\pi - x) \left(\frac{-\cos 3x}{3} \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-1) \left(\frac{-\cos 3x}{3} \right) \, dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \left[\frac{\sin 3x}{9} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2)
- $I = \int_0^\pi (\pi - x - a \sin 3x)^2 \, dx$
- とおくと

$$I = \int_0^\pi (\pi - x)^2 \, dx - 2a \int_0^\pi (\pi - x) \sin 3x \, dx + a^2 \int_0^\pi \sin^2 3x \, dx$$

第2項目で(1)を利用しながら, 積分すると

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{(\pi - x)^3}{3} \right]_0^\pi - 2a \cdot \frac{\pi}{3} + a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 6x}{2} \, dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{3}a + a^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{3}a + \frac{\pi}{2}a^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

- I は $a = \frac{2}{3}$ のとき, 最小値 $\frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{9}$ をとる. \dots\dots(\text{答})