壺のなかに赤球が 3 個，白球が 2 個入っている．無作為に 1 つの球をとり出し，色をみて元へ戻し同じ色の球をさらに 1 つ加える．引き続いて 1 つの球をとり出し，色をみてその球および 1 個の同色の球を壺のなかに加える．3 回目にまた 1 つの球をとり出す．このとき，k 回目に赤球が出るという事象を A_k とする $(k=1,\ 2,\ 3)$.

3 回とも赤球が出る確率 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ は $\boxed{}$ であり，また $P(A_3) = \boxed{}$ である．さらに，条件つき確率 $P_{A_3}(A_2)$ は $\boxed{}$ である．

(06 東京慈恵医大 1(4))

【答】

$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{3}$

【解答】

乗法定理より

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = \mathbf{\frac{2}{7}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．つぎに

$$A_3 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$$

が成り立ち，各事象は互いに排反である．上と同じように計算すると

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$$
$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$$
$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$$

であるから

$$P(A_3) = \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{3}{35} = \frac{21}{35} = \mathbf{\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．さらに，$P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)}$ であり

$$\begin{aligned} P(A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

であるから

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 赤球 a 個と白球 b 個が入った壺がある．この壺から 1 球を取り出すとき，赤球が出たらさらに赤球を α 個加えてもどし，白球が出たらさらに白球を β 個加えてもどすことにする．これを n 回繰り返すとき，n 回目に赤球が取り出される確率を P_n とする．

　$\alpha=\beta=0$ のとき，さいころに代表される復元抽出であり

$$P_n=\frac{a}{a+b}$$

　$\alpha=\beta=-1$ のとき，赤球を当たり，白球をはずれと考えればくじ引きの非復元抽出である．くじ引きは公平であるから

$$P_n=\frac{a}{a+b}$$

である．実は $\alpha=\beta$ でありさえすれば，つねに

$$P_n=\frac{a}{a+b} \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．数学的帰納法 (数学 B) でこれは示される．示しておこう．

(i) $n=1$ のとき，$P_1=\dfrac{a}{a+b}$ であり，$n=1$ のときは成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+\alpha}{a+b+\alpha}+\left(1-\frac{a}{a+b}\right)\cdot\frac{a}{a+b+\beta} \\ &= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a+\alpha}{a+b+\alpha}+\frac{b}{a+b+\beta}\right) \\ &= \frac{a}{a+b} \quad (\because\ \alpha=\beta) \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ．