実数 $x,\ y,\ z$ の間に $x+2y+3z=7$ という関係があるとき，$x^2+y^2+z^2$ は $x=\dfrac{y}{\boxed{ニ}}=\dfrac{z}{\boxed{ヌ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{ネ}}{2}$ をとる．

(07 早稲田大 人間科学 A 8)

【答】

ニ	ヌ	ネ
2	3	7

【解答】

コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

において，$a=1,\ b=2,\ c=3$ とおくと

$$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z)^2$$
$$14(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+2y+3z)^2$$

$x+2y+3z=7$ より

$$14(x^2+y^2+z^2) \geqq 7^2$$
$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{7}{2}$$

等号は

$$\begin{cases} x:y:z=1:2:3 \\ x+2y+3z=7 \end{cases} \qquad \text{すなわち}\quad x=\frac{1}{2},\ y=1,\ z=\frac{3}{2}$$

のとき成り立つ．

よって，$x^2+y^2+z^2$ は $\boldsymbol{x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$ をとる．　……(答)