次のように，円 C_1 は直交座標に関する方程式で表され，曲線 C_2 は極方程式で表されている．

$$C_1 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0$$
$$C_2 : r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta}$$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C_1 を媒介変数を用いて表せ．
(2) 曲線 C_2 はどんな曲線になるか. また，その概形もかけ.
(3) 円 C_1 の中心を通り曲線 C_2 に接する直線の方程式を求めよ．

(07 鹿児島大 理系 6)

【答】

(1) $C_1 : \begin{cases} x = -3 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$
(2) 楕円．図は略.
(3) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$，　$y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

【解答】

$$C_1 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0$$
$$C_2 : r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta}$$

(1) C_1 の方程式を平方完成すると

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 3$$

であり，C_1 は

$$\begin{cases} x + 3 = \sqrt{3}\cos\theta \\ y - 1 = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = -3 + \sqrt{3}\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

と媒介変数表示される．

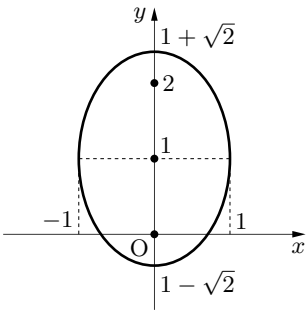
(2) C_2 の方程式を変形する．$r > 0$ が確認されるから

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta} \iff \sqrt{2}r - r\sin\theta = 1$$
$$\iff 2r^2 = (1 + r\sin\theta)^2$$

ここで，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$r\sin\theta = y$ とおくと

$$2(x^2 + y^2) = (1 + y)^2$$
$$2x^2 + 2y^2 = 1 + 2y + y^2$$
$$2x^2 + (y-1)^2 = 2$$
$$\therefore \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

これは点 $(0,\ 1)$ を中心とする長軸の長さ $2\sqrt{2}$，焦点の座標 $(0,\ 1 \pm \sqrt{2-1})$，すなわち $(0,\ 0)$，$(0,\ 2)$ の**楕円**である．概形は右図の太線部分となる．　……(答)



(3) 円 C_1 の中心 $(-3,\ 1)$ を通り傾き m の直線

$$y-1=m(x+3)$$

が楕円 C_2 と接する条件は

$$x^2+\frac{m^2}{2}(x+3)^2=1$$

が重解をもつことである．整理すると

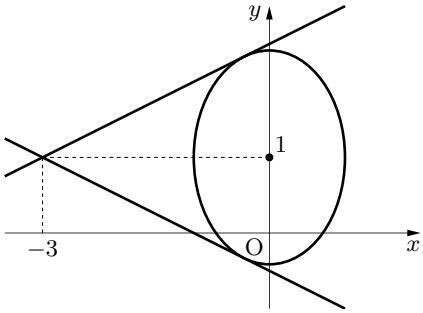
$$(m^2+2)x^2+6m^2x+9m^2-2=0$$

(判別式) $=0$ より

$$9m^4-(m^2+2)(9m^2-2)=0$$

$$-16m^2+4=0$$

$$m=\pm\frac{1}{2}$$



よって，接線の方程式は

$$y=\pm\frac{1}{2}(x+3)+1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2},\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$ ……(答)

である．