次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

(08 奈良教大 2)

【答】

(1) $\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$

(3) $\dfrac{1}{2}\log 2$

(4) $1-\dfrac{\pi}{4}$

【解答】

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

……(答)

である.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

$x=\tan\theta$ とおくと, (1) と同様にして

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{n}{4}} \cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \quad (\because\ \text{半角の公式}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

……(答)

である.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

置換積分法より

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\log|1+x^2|\Big]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $1+x^2=t$ とおくと

$2x\,dx = dt$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 2$

であるから

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\log|t|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\log 2$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

割り算を実行して

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \Big[x\Big]_0^1 - \frac{\pi}{4} \quad (\because\ (1))$$

$$= \boldsymbol{1-\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 分数式の積分について，まとめておく．
  - (i) (分子の次数) $\geqq$ (分母の次数) のときは，次数下げを行う ((4) のとき)．
  - (ii) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$ が使えるときは，この公式を使う ((3) のとき)．
  - (iii) 分母が因数分解できるときは，$\displaystyle\frac{1}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \frac{1}{\beta-a}\left(\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\right)$ と部分分数分解する．
  - (iv) 分母が因数分解できないときは，$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+(x-b)^2}dx \Rightarrow x-b=a\tan\theta$ と置換して考える ((1)(2) のとき)．