極方程式 $r = a\cos\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で与えられる曲線を C_1 とする．ただし，a は正の定数である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 上の点 P と極 O を結ぶ直線 OP の点 P の側の延長上に $\mathrm{PQ} = a$ となるように点 Q をとる．点 P が C_1 上を動くときの点 Q の軌跡 C_2 の極方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた曲線 C_2 上の点 $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ を通り，点 Q と極 O を結ぶ直線に垂直な直線を l とする．直線 l の直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線 l は，点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とし半径が a の円に接することを証明せよ．

(08 鹿児島大 理工・医 6)

【答】
(1) $C_2 : r = a(1+\cos\theta)$
(2) $l : x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 - r_0 = 0$
(3) 略

【解答】
(1) Q は直線 OP の点 P の側の延長上の $\mathrm{PQ} = a$ となる点であるから

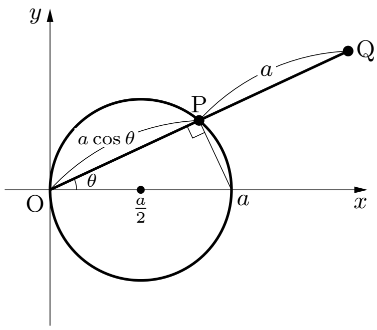
$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OP} + \mathrm{PQ}$$
$$r = a\cos\theta + a$$

よって，点 Q の軌跡 C_2 の極方程式は

$$\boldsymbol{r = a(1+\cos\theta)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $C_1 : r = a\cos\theta\ (a>0)$ は
$$r^2 = ar\cos\theta$$
であり，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$x = r\cos\theta$ とおき，直交座標で表すと
$$x^2 + y^2 = ax$$
$$\therefore\quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
となる．これは中心 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{2}$ の円である．



(2) 直線 l は，極座標では $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ を通り，直線 OQ に垂直な直線あるから，直交座標では $(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ を通り，ベクトル $(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0)$ に垂直な直線である．

直線 l の直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式は

$$\cos\theta_0(x - r_0\cos\theta_0) + \sin\theta_0(y - r_0\sin\theta_0) = 0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 - r_0 = 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 直線 l が点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とし半径が a の円に接することを示すには，中心 $(a,\ 0)$ から直線 l までの距離 d が，どのような r_0，θ_0 に対しても，a であることを示せばよい．点と直線の距離の公式より

$$d = \frac{|a\cos\theta_0 + 0 - r_0|}{\sqrt{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0}} = |a\cos\theta_0 - a(1+\cos\theta_0)| = a$$

よって，直線 l は，点 Q に関係なく点 $(a,\ 0)$ を中心とし半径が a の円に接する．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)