方程式

$$\frac{ax}{ax+a+1}=(a+1)x+1$$

の解を求めよ．ただし $a$ は $-1$ でない定数とする．

(09 奈良女子大 後 理 (数)1)

---

【答】 $a=0$ のとき $x=-1$,
$a \neq -1,\ 0$ のとき $x=-\dfrac{1}{a},\ -1$

---

【解答】

$$\frac{ax}{ax+a+1}=(a+1)x+1 \quad (a \neq -1) \qquad \cdots\cdots ①$$

① を同値変形すると

$$① \iff \begin{cases} ax=\{(a+1)x+1\}(ax+a+1) & \cdots\cdots ② \\ ax+a+1 \neq 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② を解くと

$$\begin{aligned} &ax=(a+1)ax^2+\{(a+1)^2+a\}x+a+1 \\ &(a+1)ax^2+(a+1)^2x+a+1=0 \\ &(a+1)(ax+1)(x+1)=0 \\ \therefore\ &(ax+1)(x+1)=0 \qquad \cdots\cdots ②' \quad (\because\ a \neq -1) \end{aligned}$$

(i) $a=0$ のとき，②′ の解は

$$1\cdot(x+1)=0 \qquad \therefore\quad x=-1$$

である．このとき ③ は，$0\cdot x+1=1 \neq 0$ であり，成立する．

(ii) $a \neq 0$ のとき，②′ の解は

$$x=-\frac{1}{a},\ -1$$

である．

$x=-\dfrac{1}{a}$ のとき，(③の左辺) $=a\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)+a+1=a \neq 0$

$x=-1$ のとき，(③の左辺) $=a\cdot(-1)+a+1=1 \neq 0$

いずれも③を満たす．

以上 (i)，(ii) より，求める解は

$\boldsymbol{a=0}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{x=-1}$ ……(答)

$\boldsymbol{a \neq -1,\ 0}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{x=-\dfrac{1}{a},\ -1}$ ……(答)

である．