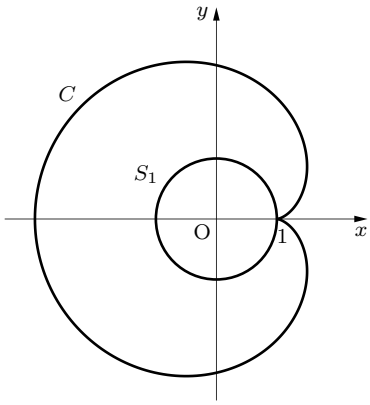
xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と，点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある．円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する．点 A の出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点を P とする．点 A が $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点 P の描く曲線を C とすると，図のようになる．また，動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を $(x(\theta),\, y(\theta))$ とする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ．
(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ．
(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

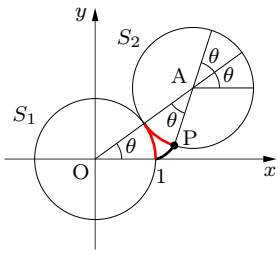
(09 長崎大 医・歯 3)

【答】

(1) $x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta, \quad y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta$
(2) 略
(3) 5π

【解答】

(1) 半径 1 の円 S_2 は半径 1 の円 S_1 上をすべることなく回転するので，OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ であるとき，$\angle\mathrm{OAP} = \theta$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と x 軸の正の方向とのなす角は $2\theta+\pi$ である．よって



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= 2(\cos\theta,\ \sin\theta) + (\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi)) \\ &= (2\cos\theta - \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)\end{aligned}$$

であり，P の座標 $(x(\theta),\ y(\theta))$ は

$$\boldsymbol{x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta},$$
$$\boldsymbol{y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta}$$

……(答)

である．

(2) θ を $2\pi - \theta$ に置き換えると

$$x(2\pi-\theta) = 2\cos(2\pi-\theta) - \cos 2(2\pi-\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta = x(\theta),$$
$$y(2\pi-\theta) = 2\sin(2\pi-\theta) - \sin 2(2\pi-\theta) = -2\sin\theta + \sin 2\theta = -y(\theta)$$

であり，OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ のときの C 上の点と，$2\pi-\theta$ のときの C 上の点は x 軸に関して対称である．

よって，曲線 C は x 軸に関して対称である．　……(証明終わり)

(3) $\theta=\pi$ のときの P の座標は

$$(x(\pi),\ y(\pi))=(-3,\ 0)$$

であり，$x=-3$ は P の x 座標の最小値である，

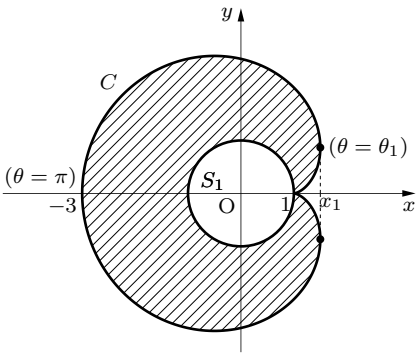
$x(\theta)$ の最大値を x_1 とおく．曲線 C は x 軸対称なので，これを与える θ は 2 つあるが，小さい方を θ_1 とおく．$0\leqq\theta\leqq\pi$ における C のうち

$0\leqq\theta\leqq\theta_1$ における C 上の点 P の座標を

$$(x_-(\theta),\ y_-(\theta))$$

$\theta_1\leqq\theta\leqq\pi$ における C 上の点 P の座標を

$$(x_+(\theta),\ y_+(\theta))$$



とおくと，曲線 C で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=2\left(\int_{-3}^{x_1}y_+\,dx-\int_{1}^{x_1}y_-\,dx\right)\\
&=2\left(\int_{\pi}^{\theta_1}y\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta-\int_{0}^{\theta_1}y\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\right)\\
&=2\int_{\pi}^{0}y\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&=2\int_{\pi}^{0}(2\sin\theta-\sin2\theta)(-2\sin\theta+2\sin2\theta)\,d\theta\\
&=4\int_{0}^{\pi}(2\sin\theta-\sin2\theta)(\sin\theta-\sin2\theta)\,d\theta\\
&=4\int_{0}^{\pi}(2\sin^2\theta-3\sin\theta\sin2\theta+\sin^2 2\theta)\,d\theta\\
&=4\int_{0}^{\pi}\left\{2\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+3\cdot\frac{1}{2}(\cos3\theta-\cos\theta)+\frac{1-\cos4\theta}{2}\right\}d\theta\\
&=2\int_{0}^{\pi}(3-3\cos\theta-2\cos2\theta+3\cos3\theta-\cos4\theta)\,d\theta\\
&=2\left[3\theta-3\sin\theta-\sin2\theta+\sin3\theta-\frac{\sin4\theta}{4}\right]_0^{\pi}\\
&=6\pi
\end{aligned}$$

よって，曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分 (上図の斜線部分) の面積は

$$S-\pi\cdot1^2=6\pi-\pi=\mathbf{5\pi}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 円 S_2 が円 S_1 に外接しながらすべらずに転がるとき，円 S_2 上の定点 P がえがく図形を**ハイポサイクロイド**という．とくに，本問のように S_1，S_2 の半径が等しいときの P がえがく図形を**カージオイド**という．