$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を l_1 とする．$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく．C と l_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2) l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくとき，l_3 の方程式を求めよ．

(3) l_3 は t によらない定点を通ることを示せ．

(4) l_3 と C の 2 つの共有点を P，Q とする．線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ．

(09 北海道大 理 3)

【答】

(1) $\cos\theta=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$

(2) $y=\dfrac{t^2-4}{4t}x+1$

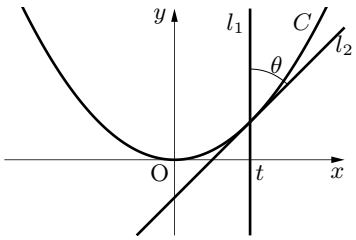
(3) 略

(4) $t=2$

【解答】

$$C : y=\frac{x^2}{4}$$

(1) $$y'=\frac{x}{2}$$



より，C 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ $(t>0)$ における接線 l_2 の傾きは $\dfrac{t}{2}$ であり，$l_1 : x=t$ と l_2 のなす角 θ について，次の関係が成り立つ．

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{t}{2} \qquad \therefore \quad \frac{1}{\tan\theta}=\frac{t}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\frac{2}{t}$$

これより

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{2}{t}\right)^2}=\frac{t^2}{t^2+4}$$

であり，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{|t|}{\sqrt{t^2+4}}=\boldsymbol{\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}} \quad (\because\ t>0) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ベクトルの内積を利用することもできる．l_1，l_2 の方向ベクトルとして $\vec{l_1}=(0,\ 1)$，$\vec{l_2}=(2,\ t)$ をとることができるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{0+t}{1\times\sqrt{4+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$$

である．

(2) l_3 は l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線であるから，l_3 の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{1}{\tan 2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{1-\left(\frac{2}{t}\right)^2}{2\cdot\frac{2}{t}}=\frac{t^2-4}{4t}$$

である．l_3 は点 $\left(t,\ \frac{t^2}{4}\right)$ を通るから，その方程式は

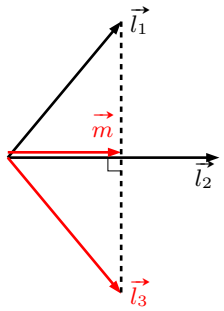
$$y=\frac{t^2-4}{4t}(x-t)+\frac{t^2}{4}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{t^2-4}{4t}x+1}\qquad\cdots\cdots ①$$

……(答)

である．

- $\vec{l_1}$ の $\vec{l_2}$ への正射影ベクトルを $\vec{m}$ とおくと



$$\frac{\vec{l_1}+\vec{l_3}}{2}=\vec{m}\qquad\therefore\quad \vec{l_3}=2\vec{m}-\vec{l_1}$$

を満たす $\vec{l_3}$ は直線 l_3 の方向ベクトルである．

$$\begin{aligned}\vec{l_3}&=2\frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_2}|^2}\vec{l_2}-\vec{l_1}\\&=2\times\frac{0+t}{4+t^2}(2,\ t)-(0,\ 1)\\&=\frac{1}{t^2+4}\left(4t,\ 2t^2\right)-(0,\ 1)\\&=\frac{1}{t^2+4}\left(4t,\ t^2-4\right)\end{aligned}$$

したがって，l_3 の傾きは $\frac{t^2-4}{4t}$ である．後は【解答】と同じ．

(3) 任意の $t(>0)$ に対して ① が成り立つ，すなわち，任意の $\frac{t^2-4}{4t}$ $(t>0)$ に対して

$$\frac{t^2-4}{4t}x+(1-y)=0$$

が成り立つ条件は

$$x=1,\ y=1$$

である．よって，l_3 は t によらない定点 $(0,\ 1)$ を通る．

……(証明終わり)

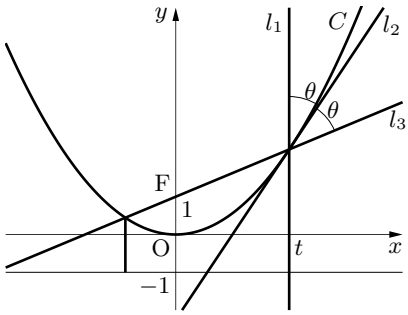
(4) l_3 と C の共有点 P，Q の x 座標は

$$\frac{x^2}{4}=\frac{t^2-4}{4t}x+1$$

$$tx^2-(t^2-4)x-4t=0$$

$$\therefore\quad (x-t)(tx+4)=0$$

$$\therefore\quad x=t,-\frac{4}{t}$$



である．(3) の定点 $(0,\ 1)$ を F とおくと，F は放物線 $C:x^2=4\cdot 1\cdot y$ の焦点であるから，P，Q から C の準線 $y=-1$ に下ろした垂線の足

をそれぞれ H，K とおくと

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ} &= \mathrm{PF} + \mathrm{FQ} = \mathrm{PH} + \mathrm{QK} \quad (\because \text{ 放物線の定義}) \\
&= \left(\frac{t^2}{4} + 1\right) + \left\{\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{t}\right)^2 + 1\right\} \\
&= \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t^2} + 2 \\
&\geqq 2\sqrt{\frac{t^2}{4} \cdot \frac{4}{t^2}} + 2 \quad (\because \text{ 相加平均・相乗平均の関係}) \\
&= 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

等号が成り立つのは

$$\frac{t^2}{4} = \frac{4}{t^2} \qquad \therefore \quad t^4 - 2^4 = 0 \qquad \therefore \quad (t-2)(t+2)(t^2+2^2) = 0$$

のときであり，$t > 0$ より，$t = 2\ (> 0)$ のときに限り成り立つ．

よって，PQ の長さが最小になる t の値は

$$\boldsymbol{t = 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．