双曲線 $C : x^2 - \dfrac{y^2}{4} = -1$ について次の問いに答えよ．

(1) C の漸近線の方程式を記せ．

(2) m を任意の実数として，直線 $y = mx$ が曲線 C に接していないことを示せ．

(3) 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ を通る C の接線の方程式をすべて求めよ．

(4) C 上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る C の接線がちょうど 2 本あって，2 本の接線が直交するとき，p，q がみたすべき条件を求めよ．

(09 同志社大 2 月 4 日 理系 4)

【答】

(1) $y = \pm 2x$

(2) 略

(3) $x \pm y = \sqrt{3}$

(4) $p^2 + q^2 = 3$　ただし $q \neq \pm 2p$

【解答】

$$C : x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$$

(1) C の漸近線の方程式は

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 0 \text{ より } \quad \boldsymbol{y = \pm 2x} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 直線 $y = mx$ と双曲線 C の方程式を連立すると

$$x^2 - \frac{m^2x^2}{4} = -1$$
$$(4 - m^2)x^2 + 4 = 0$$

$4 - m^2 = 0$ とすると $4 = 0$ となり，不合理．したがって．$4 - m^2 \neq 0$ であり

$$(\text{判別式}) = 0^2 - 4 \cdot (4 - m^2) \cdot 4 = -16 \cdot (4 - m^2) \neq 0$$

であるから，重解をもつことはない．

よって，直線 $y = mx$ が C に接することはない．　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) C 上の点 $\mathrm{T}(t,\ u)$ における接線の方程式は

$$tx - \frac{uy}{4} = -1$$

であり，これが点 $\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ を通るのは

$$\sqrt{3}t = -1 \qquad \therefore \quad t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

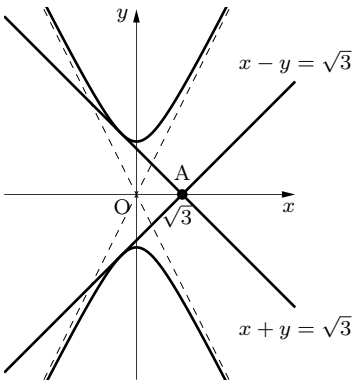
のときである．T は双曲線 C 上にあるから

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{u^2}{4} = -1 \qquad \therefore \quad u = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

である．よって，接線の方程式は

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{4}\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right)y = -1$$
$$\boldsymbol{x \pm y = \sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(4) 双曲線 C は，y 軸に平行な接線をもたないから，接線の方程式は

$$y - q = k(x - p) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおける．直線 ① と C の方程式を連立すると

$$x^2 - \frac{(kx + q - kp)^2}{4} = -1$$
$$(4 - k^2)x^2 - 2k(q - kp)x + \{4 - (q - kp)^2\} = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

C の接線がちょうど 2 本存在する条件は，② が x の 2 次方程式であって，重解を持つ k が 2 個存在することである．まず x の 2 次方程式である条件は

$$k \neq \pm 2 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．このとき，重解を持つ条件は，(判別式) $= 0$ であり

$$k^2(q - kp)^2 - (4 - k^2)\{4 - (q - kp)^2\} = 0$$
$$k^2(q - kp)^2 - 4\{4 - (q - kp)^2\} + k^2\{4 - (q - kp)^2\} = 0$$
$$-4\{4 - (q - kp)^2\} + 4k^2 = 0$$
$$k^2 - 4 + (q - kp)^2 = 0$$
$$(p^2 + 1)k^2 - 2pqk + (q^2 - 4) = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

これを満たす実数 k が 2 個存在する条件は

$$p^2q^2 - (p^2 + 1)(q^2 - 4) > 0$$
$$4p^2 - q^2 + 4 > 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

このとき，2 本の接線が直交する条件は，④の 2 つの解を k_1，k_2 とすると

$$k_1k_2 = -1$$

である．解と係数の関係より

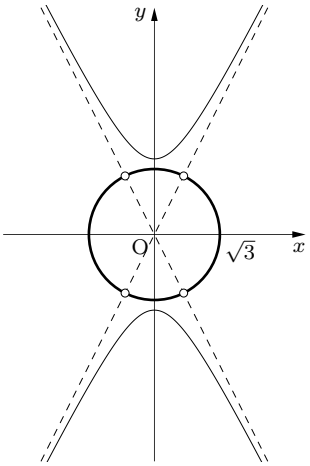
$$\frac{q^2 - 4}{p^2 + 1} = -1$$
$$p^2 + q^2 = 3 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

このとき，⑤ の左辺は

$$4p^2 - (3 - p^2) + 4 = 5p^2 + 1 > 0$$

となるから， ⑤ はつねに成り立つ．また，条件 ③ より，④の解は ± 2 以外でなければならない．

$$4(p^2 + 1) \mp 4pq + (q^2 - 4) \neq 0$$
$$4p^2 \mp 4pq + q^2 = 0$$
$$(2p \mp q)^2 \neq 0$$
$$2p \neq \pm q \qquad \cdots\cdots ⑦$$



よって，求める条件は，⑥，⑦ である．

$$\boldsymbol{p^2 + q^2 = 3 \quad ただし\ q \neq \pm 2p} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- (3) で求めた 2 本の接線は直交しているから，$\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ は (4) の条件を満たしている．(4) の条件を満たす点 P を xy 平面に図示すると右図となる．この円は双曲線 C の準円と呼ばれている．