以下の問いに答えよ．答えだけでなく，必ず証明も記せ．

(1) 和 $1+2+\cdots+n$ を n の多項式で表せ．
(2) 和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を n の多項式で表せ．
(3) 和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ を n の多項式で表せ．

(10 九州大 文系 4)

【答】

(1) $\dfrac{1}{2}n(n+1)\left(=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n\right)$
(2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\left(=\dfrac{1}{3}n^3+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n\right)$
(3) $\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2\left(=\dfrac{1}{4}n^4+\dfrac{1}{2}n^3+\dfrac{1}{4}n^2\right)$

【解答】

(1) $$S=1+2+\cdots+n$$
とおく．並べかえて
$$S=n+(n-1)+\cdots+1$$
辺々加えると
$$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{ 個}}=n(n+1)$$
$$\therefore\quad S=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}\left(=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
である．

- 問題文は「n の多項式で表せ」とある．n の多項式とは単項式の和として表される式
$$a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3+\cdots$$
であると解釈すると
$$S=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$
と答えるべきかもしれない．ここでは，教科書にある形 (多項式を因数分解した形) で表した．
- いろいろな解法がある．

(別解 1) S は初項 1，公差 1 の等差数列の n 項の和であるから
$$S=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- ○ 等差数列の和の公式として $\dfrac{(\text{項数})(\text{初項}+\text{末項})}{2}$ を用いたが，これは解答と同じ考え方による結果である．

(別解 2) 等式 $(k+1)^2-k^2=2k+1$ を利用する (教科書流解法)．
$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入して，辺々加えると
$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$\therefore\quad (n+1)^2-1^2=2S+n$$
よって
$$S=\frac{1}{2}\left\{(n+1)^2-(n+1)\right\}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)-1\}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(別解 3) $k=\dfrac{1}{2}\{k(k+1)-(k-1)k\}$ であるから

$$S=\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\{k(k+1)-(k-1)k\}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(別解 4) 結果は公式として覚えているので，$S(n)=1+2+\cdots+n$ とおき，

$$S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)\ \cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示してもよい．

(i) $n=1$ のとき

$$S(1)=1,\quad (\text{右辺})=\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)=1$$

$n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}S(k+1)&=S(k)+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=(\text{右辺})\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) よりすべての自然数 n に対し $(*)$ は成り立つ．

(2) $$T=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

とおく．等式

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

において $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入し，辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$\therefore\quad (n+1)^3-1^3=3T+3S+n$$

よって

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}\quad(\because\ (1))\\&=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)\right\}\\&=\frac{1}{6}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}\\&=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}\left(=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)\end{aligned}$$

……(答)

である．

- 等式 $k(k+1)=\dfrac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$ を利用してもよい．

  $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$T+S=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad T&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)\quad(\because\ (1))\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

- $T=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示してもよい．

(3) $$U=1^3+2^3+\cdots+n^3$$

とおく．等式

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

において $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入し，辺々加えると

$$\sum_{h=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$\therefore\quad (n+1)^4-1=4U+6T+4S+n$$

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}\quad(\because\ (1),\ (2))\\&=\frac{1}{4}\{(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\}\\&=\frac{1}{4}(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}\\&=\frac{1}{4}(n+1)(n^3+n^2)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}\left(=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\right)\end{aligned}$$

……(答)

である．

- $k(k+1)(k+2)=\dfrac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$ を利用する．

  $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入して，辺々加えると

  $$\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

  $$U+3T+2S=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

  $$\begin{aligned}\therefore\quad U&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n^2+5n+6)-2(2n+1)-4\}\\&=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n)\\&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

- $U=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示してもよい．