　ある奇数の自然数 m から始まる連続する奇数個の自然数の和が 2010 である．m を求めよ．

(10 信州大 教育 3)

【答】 $m = 127,\ 669$

【解答】

　奇数 m から始まる連続する奇数個の自然数列の末項は，項数を $2k+1$ 個とすると，$m+2k$ である．和が 2010 であるから，k は 1 以上の整数となり

$$\frac{(2k+1)\{m+(m+2k)\}}{2} = 2010$$

$$(2k+1)(m+k) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

右辺は偶数であるから，左辺も偶数であり，左辺の $2k+1$ は奇数であるから，$m+k$ は偶数である．m は奇数であるから k も奇数であり

$$m = 2m'+1\ (m' \text{は 0 以上の整数}),\quad k = 2k'+1\ (k' \text{は 0 以上の整数})$$

とおくことができる．このとき ① は

$$(4k'+3)(2m'+2k'+2) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$$

$$\therefore\quad (4k'+3)(m'+k'+1) = 3\cdot 5\cdot 67 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

となる．

　$4k'+3 \geqq 67$ とすると $k' \geqq 16$ であり

$$(4k'+3)(m'+k'+1) \geqq 67\cdot(m'+16+1) \geqq 67\cdot 17$$

これは ② に反する．したがって $4k'+3 < 67$ であり，② より

$$4k'+3 = 3,\ 5,\ 15 \quad (\because\ k' \geqq 0)$$

のいずれかである．k' は 0 以上の整数であるから

$$k' = 0,\ 3$$

である．

(i) $k'=0$ のとき，②は

$$3(m'+1) = 3\cdot 5\cdot 67 \qquad \therefore\quad m' = 334 \qquad \therefore\quad m = 2\cdot 334+1 = 669$$

(ii) $k'=3$ のとき，②は

$$15(m'+4) = 3\cdot 5\cdot 67 \qquad \therefore\quad m' = 63 \qquad \therefore\quad m = 2\cdot 63+1 = 127$$

　以上 (i)，(ii) より，求める m の値は

$$\boldsymbol{m = 127,\ 669} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．