数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(10 弘前大 人文・教育・農 2)

【答】

(1) $b_{n+1} = \dfrac{1}{5} b_n$

(2) $a_n = \dfrac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$

【解答】

$$a_1 = 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ とおくと，② より

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{4a_n + 3}{a_n + 2} - 3}{\dfrac{4a_n + 3}{a_n + 2} + 1}$$

$$= \frac{(4a_n + 3) - 3(a_n + 2)}{(4a_n + 3) + (a_n + 2)} = \frac{a_n - 3}{5a_n + 5} = \frac{1}{5} b_n$$

よって，数列 $\{b_n\}$ の漸化式は

$$\boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{5} b_n} \ (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{4 - 3}{4 + 1} = \dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列だから

$$b_n = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5^n}$$

が成り立つ．$b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ を a_n について整理すると

$$b_n(a_n + 1) = a_n - 3$$

$$(1 - b_n)a_n = 3 + b_n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{3 + b_n}{1 - b_n}$$

であるから

$$a_n = \frac{3 + \dfrac{1}{5^n}}{1 - \dfrac{1}{5^n}} = \boldsymbol{\frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ に対し，$x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ を解くと $x=-1,\ 3$ であり，$b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ はこの値をもとにつくられたものである．$b_n{}'=\dfrac{a_n+1}{a_n-3}$ とすれば，初項 5，公比 5 の等比数列が得られる．
- 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n+1}\right\}$ あるいは $\left\{\dfrac{1}{a_n-3}\right\}$ を考えてもよい．2 項間漸化式を得ることができる．

　$c_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}+1}=\frac{a_n+2}{5a_n+5}\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_n+1}+1\right)=\frac{1}{5}c_n+\frac{1}{5}\quad\text{(2 項間漸化式が得られた)}\end{aligned}$$

この式は

$$c_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\left(c_n-\frac{1}{4}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{c_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{4+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{20}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$c_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=-\frac{1}{4\cdot 5^n}\qquad\therefore\quad c_n=\frac{5^n-1}{4\cdot 5^n}$$

であり

$$a_n=\frac{1}{c_n}-1=\frac{4\cdot 5^n}{5^n-1}-1=\frac{3\cdot 5^n+1}{5^n-1}$$

である．

　あるいは $d_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくなら

$$\begin{aligned}d_{n+1}&=\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{1}{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-3}=\frac{a_n+2}{a_n-3}\\&=\frac{5}{a_n-3}+1=5d_n+1\quad\text{(2 項間漸化式が得られた)}\end{aligned}$$

$d_1=\dfrac{1}{4-3}=1$ に注意して解くと

$$d_n=\frac{5^n-1}{4}$$

であり

$$a_n=\frac{1}{d_n}+3=\frac{4}{5^n-1}+3=\frac{3\cdot 5^n+1}{5^n-1}$$

である．