関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{|x|}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ のとき，$y=f(x)$ の極値と漸近線を求め，グラフの概形をかけ．
(2) $x<0$ のとき，$y=f(x)$ の極値と漸近線を求め，グラフの概形をかけ．

(10 奈良教大 1)

---

【答】

(1) 略
(2) 略

---

【解答】

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{|x|}$$

(1) $x>0$ のとき

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}=x+2+\frac{1}{x}$$
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ |

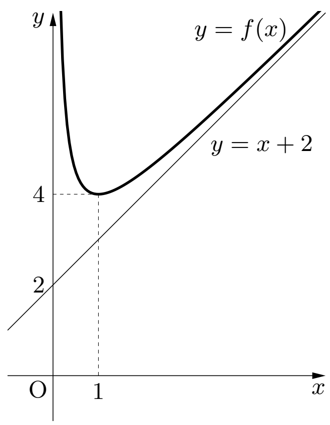
さらに

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+2)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

であるから

**極値：$\boldsymbol{f(1)=4}$,**
**漸近線：$\boldsymbol{x=0,\ y=x+2}$** ……(答)

であり，グラフの概形は右図となる．




(2) $x<0$ のとき

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{-x}=-x-2-\frac{1}{x}$$
$$f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}$$

$x<0$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $(0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

さらに

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \{f(x) - (-x-2)\} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

であるから

**極値：$\boldsymbol{f(-1) = 0}$,**

**漸近線：$\boldsymbol{x = 0,\ y = -x - 2}$** ……（答）

であり，グラフの概形は右図となる．