平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1 : 2 に内分する点を E，対角線 BD を $1 : a$ に内分する点を F とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ．

(2) 点 F が直線 AE 上にあるとき，定数 a の値を求めよ．

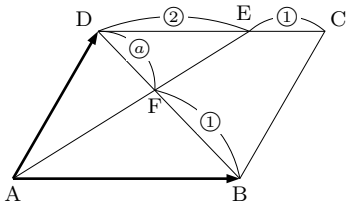
(10 福井工大 6)

【答】

(1) $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2) $a = \dfrac{2}{3}$

【解答】



(1) E は辺 CD を 1 : 2 に内分する点であるから

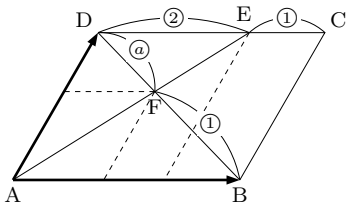
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) △FAB ∽ △FED であり，相似比に注目すると

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB} : \mathrm{ED} = \mathrm{BF} : \mathrm{DF} \\ &1 : \frac{2}{3} = 1 : a \\ &\therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．



- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立であるから，平面 ABD 上の点 P は

  $$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

  の形に一通りに表される．このとき $(x,\ y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を基底とする斜交座標と呼ばれる．

  本問での E，F の斜交座標は

  $$\mathrm{E}\left(\frac{2}{3},\ 1\right),\ \mathrm{F}\left(\frac{a}{a+1},\ \frac{1}{a+1}\right)$$

  である．

  (1) E の斜交座標より

  $$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

  である．

  (2) 斜交座標平面において，F は直線 AE : $y = \dfrac{3}{2}x$ 上の点であるから

  $$\frac{1}{a+1} = \frac{3}{2}\,\frac{a}{a+1} \qquad \therefore \quad a = \frac{2}{3}$$

  である．