

大きさ3の空間ベクトル \vec{p} は $\vec{q} = (1, 1, 0)$ と 45° の角をなし, $\vec{r} = (0, 1, 1)$ とも 45° の角をなす. このとき \vec{p} を求めよ.

(10 東京女大 現代教養 6)

【答】 $\vec{p} = (2, 1, 2), (0, 3, 0)$

【解答】

$\vec{p} = (x, y, z)$ とおくと, 与えられた条件から

$$\begin{cases} |\vec{p}| = 3 \\ \vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos 45^\circ \\ \vec{p} \cdot \vec{r} = |\vec{p}||\vec{r}| \cos 45^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y = 3 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y + z = 3 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x = 3 - y & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ z = 3 - y & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②, ③を①に代入すると

$$\begin{aligned} (3 - y)^2 + y^2 + (3 - y)^2 &= 9 \\ 3y^2 - 12y + 18 &= 9 \\ y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ (y - 1)(y - 3) &= 0 \\ \therefore y &= 1, 3 \end{aligned}$$

よって

$$\vec{p} = (2, 1, 2), (0, 3, 0) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.