方程式 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$ の解は $x=$ $\boxed{\text{カ}}$ である．

(11 東海大 医 1(3))

【答】

カ
5

【解答】

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5 \qquad \cdots\cdots ①$$

① を同値変形しながら，根号をはずしていく．

$$① \iff \sqrt{2x-1}=5-\sqrt{x-1}$$

辺々平方して

$$\iff \begin{cases} 2x-1=(5-\sqrt{x-1})^2 \\ 5-\sqrt{x-1} \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-1=25-10\sqrt{x-1}+(x-1) \\ \sqrt{x-1} \leqq 5 \end{cases}$$

第 2 式の辺々も平方すると

$$\iff \begin{cases} 10\sqrt{x-1}=25-x \\ x-1 \leqq 25 \\ x-1 \geqq 0 \end{cases}$$

第 1 式の辺々を平方して，不等式を整理すると

$$\iff \begin{cases} 100(x-1)=(25-x)^2 \\ 25-x \geqq 0 \\ 1 \leqq x \leqq 26 \end{cases}$$

式を整理すると

$$\therefore \quad \begin{cases} x^2-150x+725=0 \\ 1 \leqq x \leqq 25 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} (x-5)(x-145)=0 \\ 1 \leqq x \leqq 25 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．