実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す．
たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である．

(1) $n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ．
(2) $[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．
(3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする．$x^2-5[x]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ．

(11 北海道大 文系 1)

【答】

(1) $n=2,\ 3$
(2) $2 \leqq x < 4$
(3) $x=\sqrt{5},\ \sqrt{10}$

【解答】

(1) $n^2-5n+5<0$ を解くと

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}<n<\frac{5+\sqrt{5}}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，$2<\sqrt{5}<3$ より

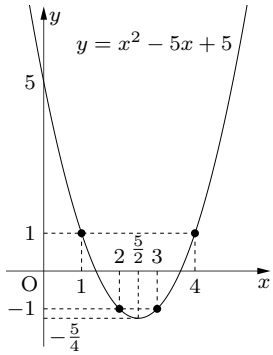
$$1<\frac{5-\sqrt{5}}{2}<\frac{3}{2},\quad \frac{7}{2}<\frac{5+\sqrt{5}}{2}<4$$

であるから，①を満たす整数 n は

$$\boldsymbol{n=2,\ 3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 求める n は整数だから，2 次不等式を解かなくても $y=x^2-5x+5$ のグラフを描くことにより処理できる．
  軸 $x=\dfrac{5}{2}$ に近い x 座標が整数である点を調べると右図の黒丸 ● となるから，求める整数 n は 2, 3 である．



(2) $[x]$ は整数であり

$$[x]^2-5[x]+5<0$$

を満たす $[x]$ は (1) より

$$[x]=2,\ 3$$

である．

$[x]=2$ を満たす x は　$2 \leqq x < 3$
$[x]=3$ を満たす x は　$3 \leqq x < 4$

であり，求める実数 x の範囲は

$$\boldsymbol{2 \leqq x < 4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $2 \leqq x < 4$ のもとで考える．

$$x^2-5[x]+5=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$2 \leqq x < 3$ のとき，$[x]=2$ より

$$x^2-5\cdot 2+5=0 \qquad \therefore\quad x=\pm\sqrt{5}$$

x の範囲を考えると　　$x = \sqrt{5}$
$3 \leqq x < 4$ のとき，$[x] = 3$ より

$$x^2 - 5 \cdot 3 + 5 = 0 \qquad \therefore \quad x = \pm\sqrt{10}$$

x の範囲を考えると　　$x = \sqrt{10}$
　よって，求める x は

$$\boldsymbol{x = \sqrt{5},\ \sqrt{10}}$$ ……(答)

である．