実数 x_i, y_i, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して次の不等式を証明せよ．ただし，n は自然数である．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

(11 大分大 医 1(2))

【答】 略

【解答】

x_i, y_i は実数であるから，任意の実数 t に対して

$$(x_i t - y_i)^2 \geqq 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が成り立つ．これらの辺々を加えて

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i t - y_i)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 t^2 - 2x_i y_i t + {y_i}^2) \geqq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

t^2 の係数 $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ は，${x_i}^2 \geqq 0$ より $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geqq 0$ である．①$'$ の (左辺) を $f(t)$ とおく．

(i) $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 > 0$ のとき

任意の実数 t に対して ①$'$ が成り立つ条件は，2 次方程式 $f(t)=0$ の (判別式) $\leqq 0$ が成り立つことである．すなわち

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) \leqq 0$$

$$\therefore \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

(ii) $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0$ のとき

$x_i = 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるから，②の両辺とも 0 になり，②は成立する．

以上，(i)，(ii) より，実数 x_i, y_i, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して ② が成り立つ．左辺は 0 以上であるから，辺々の平方根をとることができ

$$② \iff \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} \quad \left(\because\ \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \geqq 0\right)$$

である．ここで

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2} = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} \qquad \cdots\cdots \text{(証明終わり)}$$

が成り立つ．

- ② の等号が成立する条件を確認しておく．

(i) $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 > 0$ のとき

等号が成立するのは，t が $f(t)=0$ を満たすときであり，① より

$$x_i t - y_i = 0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

を満たす t が存在するときである．これは

$$y_i = x_i t \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad \cdots\cdots ㋐$$

より

$$t \neq 0 \text{ のとき} \quad y_1 : y_2 : \cdots : y_n = x_1 : x_2 : \cdots : x_n$$
$$t = 0 \text{ のとき} \quad y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$$

と表すこともできる．

$t \neq 0$ のとき，㋐ より

$$x_i = 0 \Longrightarrow y_i = 0, \quad y_i = 0 \Longrightarrow x_i = 0$$
$$\therefore \quad x_i = 0 \iff y_i = 0$$

が成り立つから，x_i，y_i のいずれか一方が 0 のときは他方も 0 と約束すると

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = y_1 : y_2 : \cdots : y_n$$

は

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$$

と表すこともできる．

(ii) $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0$ のとき

x_i $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ は実数より

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

である．

以上をまとめると，② の等号が成立する条件は

「$x_i t - y_i = 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を満たす実数 t が存在する
　または
$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$」

あるいは

「$x_i t - y_i = 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を満たす実数 t $(\neq 0)$ が存在する
　または
$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
　または
$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$」

あるいは

「$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = y_1 : y_2 : \cdots : y_n$
$\left(\iff \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{y_n} \right.$
　ただし，x_i，y_i のいずれか一方が 0 のときは他方も 0 とする$\Big)$
　または
$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
　または
$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$」

と表すことができる．